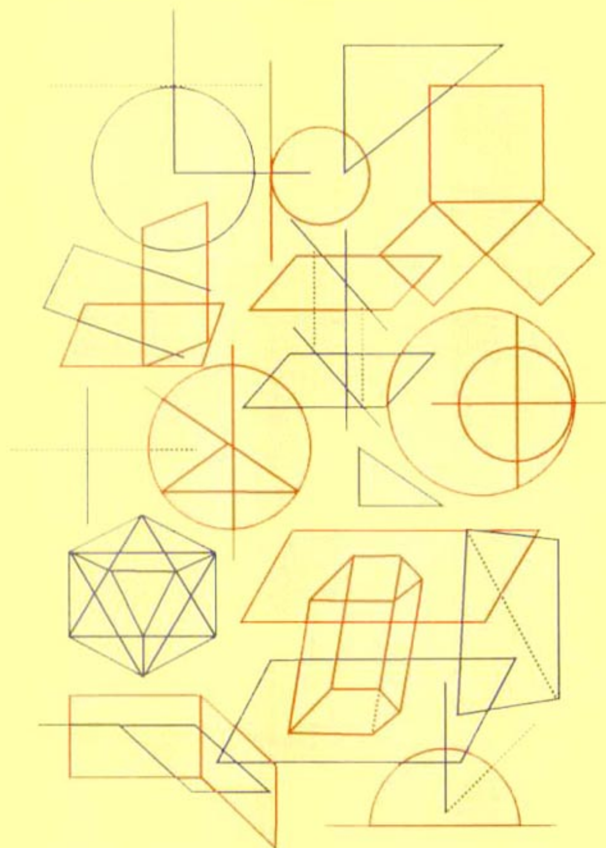
Geometría elemental

A.V. Pogorélov



Editorial Mir Moscú


ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИР

А. В. Погорелов

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Издательство «Наука»
Москва

Geometría elemental

A. V. Pogorélov

Traducido del ruso por
CARLOS VEGA,
catedrático de Matemáticas Superiores

Editorial Mir
Moscú

Impreso en la URSS 1974

A NUESTROS LECTORES:

«Mir» edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe, alemán e italiano. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica: manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas; literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia ficción.

Dirijan sus opiniones a la Editorial «Mir», I Rizhski per., 2, GSP, Moscú I-110, 129820 URSS.

INDICE

En las etapas iniciales, la enseñanza de la Geometría tiene por objeto, además de comunicar a los alumnos los resultados geométricos, darles a conocer el método con ayuda del cual se obtienen esos resultados. Sabido es que los resultados geométricos (teoremas) son obtenidos por medio de razonamientos lógicos (demostraciones) arrancando de algunos planteamientos de partida (axiomas). Los razonamientos lógicos son parte indispensable de todo saber. La Geometría se distingue por la claridad y la sencillez tanto en el enunciamiento del resultado como en los planteamientos de arranque a partir de los cuales debe obtenerse ese resultado. De ahí que la Geometría nos brinde las mejores oportunidades para desarrollar el pensamiento lógico en la escuela.

Al ofrecer el curso presente partimos de que la tarea esencial de la enseñanza de la Geometría en la escuela consiste en enseñar al alumno a razonar lógicamente, argumentar sus afirmaciones y demostrarlas. Muy pocos de los egresados de la escuela serán matemáticos y mucho menos geómetras. También habrá los que no utilicen ni una vez en su actividad práctica el teorema de Pitágoras. Sin embargo, difícilmente hallárase uno sólo que no deba razonar, analizar o demostrar.

La experiencia secular de la enseñanza de la Geometría elemental desde los tiempos de Euclides prueba la eficiencia del sistema tradicional. Su perfeccionamiento, relacionado con el desarrollo general de la ciencia, no debe afectar, creemos nosotros, sus bases racionales y profundamente meditadas. Por eso, el curso que ofrecemos, tradicional en esencia, se distingue sólo por una exposición más rigurosa de la materia y cierta revaloración del significado de sus partes componentes.

Este curso de Geometría se basa en un sistema muy poco numeroso de hechos geométricos bien conocidos del alumno y asimilados en los grados primarios. Este sistema de planteamientos de arranque, llamados más adelante axiomas, ha sido seleccionado del previo análisis minucioso del curso escolar de Geometría tomando en consideración los elementos de demostraciones tradicionales.

La exposición comienza con la repetición, típica en la enseñanza escolar, de lo estudiado anteriormente. Por lo

menos, así será considerado por el alumno. Empero, nuestra meta auténtica es distinta y más profunda: introducir los conceptos y planteamientos de arranque fundamentales, es decir, los axiomas. Los axiomas están enunciados en forma de las propiedades fundamentales de las figuras geométricas elementales compuestas de puntos y rectas. Estos axiomas son sencillos y naturales. Hay casos en que los axiomas son enunciados más ampliamente que exigiría la cuestión para evitar preguntas y confusiones. Por ejemplo, decimos que existen puntos que se hallan en una recta dada y puntos que no se hallan en dicha recta. En realidad, nos bastaría la exigencia de dos puntos en la recta y un punto fuera de la recta.

Una peculiaridad distintiva de nuestra axiomática son los axiomas de la medición de los segmentos y los ángulos. Estos axiomas nos brindan ventajas metódicas substanciales. En primer lugar, eludimos el escollo de introducir la medida para los segmentos y los ángulos. Sabido es que la solución de este problema, dada la construcción axiomática de la geometría, no es nada sencilla y requiere el empleo de medios inasequibles para el alumno por su profundidad. Segundo, a través de los axiomas de la medición incorporamos la Aritmética cursada ya para entonces con lo cual se ensancha notablemente el arsenal de medios utilizados en la demostración geométrica.

Naturalmente, los axiomas de la medición de los segmentos y los ángulos requieren la definición correspondiente de los conceptos de la igualdad de los segmentos y los ángulos. Llamamos iguales a los segmentos de longitud idéntica. Por extraño que parezca, la mayoría de las personas consideran los segmentos iguales precisamente en este caso, aunque la igualdad de los segmentos se define en la escuela a través de la superposición. Por ello, nuestra definición de la igualdad de los segmentos también es natural desde este punto de vista. En nuestra exposición, la superposición y el movimiento en general son conceptos derivados y sólo los introducimos a mediados del curso.

El segundo parágrafo se inicia con una definición tan precisa de los conceptos axioma, teorema y demostración que nos permite dar siempre una respuesta neta al «por qué» en cada punto de las demostraciones. Por otra parte, tenemos el derecho moral de plantear ese «por qué» al alumno y de exigirle una respuesta. El concepto de la demostra-

ción es ilustrado con ejemplos sencillos de análisis circunstanciado.

Conservamos el orden tradicional de distribución del material. Por eso consagramos el § 3 a los ángulos. En este parágrafo las demostraciones de los teoremas son sencillas y naturales. Se basan en los axiomas de la medición y de la construcción de los ángulos.

El parágrafo siguiente se dedica a la igualdad de los triángulos. Su contenido es corriente y las demostraciones sencillas e irreprochables. En términos generales, las demostraciones empleadas no contienen, en cuanto a la idea, nada nuevo. Son bien conocidas. Sin embargo, gracias a la formulación precisa de los planteamientos de arranque, logramos con unas cuantas pinceladas hacer estas demostraciones absolutamente irreprochables. Estas «pinceladas» se refieren en la mayoría de los casos a las propiedades de la posición recíproca de los puntos en la recta y de los rayos en el haz. Dentro de las matemáticas en general, y de las matemáticas modernas en particular, la relación de orden desempeña tanto papel como la relación de equivalencia. Por eso, también desde este punto de vista es conveniente desarrollar este concepto en las figuras geométricas sencillas.

En el § 5 y el § 6 son tratadas las cuestiones tradicionales: propiedad del ángulo exterior del triángulo, relación entre los lados del triángulo y los ángulos opuestos, desigualdad triangular, la perpendicular y la oblicua. Termina cada parágrafo con numerosas preguntas de repaso y ejercicios. Las preguntas de repaso comprenden la definición de los conceptos y la demostración de los teoremas así como de los corolarios que de ellos se desprenden. También abarcan cuestiones no tan esenciales del curso. Las preguntas de repaso determinan exactamente el volumen de los conocimientos necesarios para el alumno y son medio de autocontrol.

El parágrafo siguiente está dedicado a las construcciones geométricas. Analiza los principales problemas de construcción utilizando el compás y la regla y explica el método de los lugares geométricos. Debe decirse que en el actual curso escolar de Geometría no se presta al tema de las construcciones geométricas tanta importancia como en el pasado. Se comprende: las construcciones geométricas ofrecen interés, principalmente, para el desarrollo de las búsquedas de solución y el entrenamiento en las demostraciones.

Pero las construcciones geométricas no son el único medio de lograr este propósito.

Los siete primeros parágrafos de este libro podrían ser abarcados bajo el título de Geometría absoluta. En ellos no se utiliza el axioma de las paralelas. Quede sentado que el empleo del axioma de las paralelas no ofrece ventajas palpables en la exposición de esta parte. Si se toma en consideración que la Planimetría está calculada para tres años de enseñanza, esta parte del curso se puede recomendar para el primer año. En el segundo año de enseñanza incluimos la teoría de las paralelas y los temas colaterales inmediatos (§§ 8—12).

El parágrafo octavo del libro está dedicado a la teoría de las paralelas. Comienza con la demostración de los criterios de paralelismo. Alterando la tradición, nos limitamos a dos pares de ángulos de dos paralelas con una secante: los correspondientes internos y los alternos internos. En efecto, estos dos pares de ángulos bastan plenamente para exponer la teoría de las paralelas y de sus aplicaciones. Otros pares de ángulos, como son los correspondientes externos, los alternos externos y demás, no se utilizan prácticamente. En cambio, los ángulos correspondientes internos y alternos son determinados por nosotros rigurosamente, y no sólo por medio de figuras como se hace a menudo, y su empleo en las demostraciones se argumenta a fondo. El § 9 contiene el material tradicional sobre los cuadriláteros.

En el § 10 introducimos el concepto del movimiento que, en nuestra exposición, es concepto derivado. Se define como una aplicación que conserva la distancia. Son demostradas las propiedades principales del movimiento y estudiados los casos particulares de los movimientos: simetría respecto a una recta, simetría respecto a un punto, traslación paralela y rotación. Conviene señalar que el concepto del movimiento geométrico se asocia naturalmente con un proceso. La manera de exponer la Geometría en la escuela, empleando el concepto del movimiento desde el comienzo, da lugar a embrollos y confusiones. Según nuestro método, las propiedades del movimiento netamente formuladas son primero demostradas y luego se aplican.

En el parágrafo siguiente se estudia la circunferencia. El tema central de este parágrafo es el problema de los ángulos en la circunferencia. Se define con precisión los conceptos del arco de circunferencia, del ángulo central que

le corresponde y de la medida del ángulo central. Se introduce el concepto del ángulo inscrito y se demuestran los teoremas correspondientes de los ángulos inscritos.

El § 12 contiene el tema final del segundo año de enseñanza. En él se expone, ante todo, la cuestión de la semejanza de los triángulos que, como se sabe, no se lleva nunca hasta el fin en la exposición escolar. En efecto, su solución completa exige el empleo del axioma de la continuidad. Por eso la demostración de la semejanza de los triángulos en el caso principal suele detenerse a mitad del camino. En nuestra exposición el axioma de la continuidad actúa a través del axioma de la medición. Concluimos la demostración del criterio principal de la semejanza con una sencilla observación que se desprende del axioma de la medición.

En el curso escolar de la Geometría suele quedar abierta la cuestión de la intersección de la recta con la circunferencia y de la intersección de dos circunferencias. Siempre por la misma causa: la cuestión tropieza con el axioma de la continuidad. Nosotros damos una solución sencilla y exhaustiva de este problema. Y esto se logra, en fin de cuentas, también gracias a los axiomas de la medición.

La tercera parte del curso arranca con el teorema de Pitágoras y sus corolarios: relaciones métricas en un triángulo oblicuángulo, relación entre las diagonales y los lados de un paralelogramo, etc. Además de estas cuestiones tradicionales, se da una demostración sencilla del importante teorema de la existencia del triángulo de lados dados previo cumplimiento de ciertas condiciones necesarias. Este teorema da solución exhaustiva al problema de la posición recíproca de dos circunferencias en dependencia de sus radios y de la distancia entre los centros.

En el § 14 se introducen las funciones trigonométricas de los ángulos. Nos limitamos a tres funciones: seno, coseno y tangente. Sabido es que las tres funciones restantes—secante, cosecante y cotangente—no se utilizan prácticamente. El material de este parágrafo es corriente: fórmulas de reducción, relaciones entre los lados y los ángulos en un triángulo rectángulo, teorema del coseno y teorema de los senos. El parágrafo que le sigue está consagrado a los polígonos convexos con problemas tradicionales acerca de la suma de los ángulos internos y externos, de la relación entre la longitud de una quebrada convexa y de una quebrada abarcante y, en fin, a los polígonos regulares.

En el curso escolar ofrece ciertas dificultades la exposición del problema del área de las figuras. Nosotros solucionamos este problema de la siguiente manera. Al principio, el concepto del área se introduce, argumentando a fondo sus propiedades, al estudiar un problema práctico concreto. Luego se explica que estas propiedades determinan el área unívocamente. En fin, se demuestra que es correcta la definición del área con esas propiedades. Esta última cuestión puede considerarse facultativa en la enseñanza escolar.

Finalmente, el último tema de la Planimetría: longitud de la circunferencia y área del círculo. En cualquier variante esta cuestión ofrece grandes dificultades. Una es el problema de la existencia, aunque en los grados superiores se vence fácilmente. Hemos unificado las definiciones de los conceptos principales relacionados con la medición de los arcos y las áreas para la circunferencia y el círculo, lo que debe simplificar la exposición. A parte de las cuestiones de la existencia, que han quedado abiertas, otras cuestiones están resueltas con plenitud y precisión suficientes.

La segunda parte del libro, la Estereometría, arranca con el enunciado de los tres axiomas del espacio y la deducción de sus corolarios directos (§ 18). Los axiomas aceptados por nosotros suponen cierta modificación de los axiomas de enunciado tradicional y concuerdan bien con los axiomas del plano. El parágrafo siguiente trata de las cuestiones del paralelismo de las rectas y los planos en el espacio con teoremas y demostraciones tradicionales.

El extenso § 20 está dedicado a diferentes cuestiones de la perpendicularidad de las rectas y los planos. Los parágrafos 18, 19 y 20 constituyen la base de la segunda parte del curso. Hay un parágrafo especial (el 21) para las cuestiones relacionadas con el concepto de ángulo entre rectas y planos. Estos conceptos son definidos con claridad. Quedan demostrados los correspondientes teoremas acerca de los ángulos.

El parágrafo 22 acerca de los ángulos diedros, triedros y poliedros contiene, además de las cuestiones tradicionales del curso escolar, la demostración del teorema de los cosenos y del teorema de los senos para el ángulo triedro. Suponemos que estos teoremas, importantes y muy usuales, deben darse en el curso escolar. Sabido es que la solución de los problemas de la posición recíproca de las rectas y los planos en el espacio, y en particular la solución de los problemas de

prismas y pirámides, se reduce en su parte esencial a la demostración de estos teoremas generales en distintos casos particulares.

El parágrafo siguiente (23) está dedicado a las transformaciones en el espacio (movimiento, simetría, semejanza y demás). En este parágrafo, la exposición repite deliberadamente, y en ciertos casos textualmente, el parágrafo acerca de las transformaciones en el plano. Para el alumno adelantado, este parágrafo será un agradable repaso de hechos de Planimetría que ya conoce.

El tema de los poliedros (§ 24) comienza con la definición del concepto del cuerpo geométrico. Este concepto se introduce de manera rigurosa y, al mismo tiempo, muy asequible. La rigurosa introducción del concepto del cuerpo geométrico permite llevar más adelante ese rigor a la exposición del problema del volumen y del área del cuerpo geométrico. Los teoremas de prismas y pirámides dados en este parágrafo son tradicionales. El tema de los poliedros regulares se expone de manera más circunstanciada que suele hacerse en el curso escolar.

El cuarto año de estudio de la Geometría termina aquí con el § 25 sobre los rudimentos de la delineación proyectiva. Este parágrafo contiene todas las tareas principales de la posición recíproca de los puntos, las rectas y los planos al representarlos en el diseño.

En el § 26, partiendo de la tarea práctica de comparar la capacidad de dos recipientes, se introduce el concepto del volumen del cuerpo y se dilucidan sus propiedades esenciales. Por el método corriente, basándose en esas propiedades, se encuentran los volúmenes de los cuerpos elementales: prismas y pirámides. En fin, se demuestra la justeza de la definición formal del volumen de un poliedro como suma de los volúmenes de las pirámides que lo constituyen. Este último punto puede recomendarse para estudio facultativo. La cuestión del volumen de los cuerpos está expuesta de manera deliberadamente próxima a la cuestión del área de las figuras planas y, para el alumno adelantado, también será un repaso agradable.

Las cuestiones tradicionales relativas a los cuerpos de revolución —cilindro, cono y esfera— están expuestas en el § 27. La medición de los volúmenes y las áreas de estos cuerpos no está incluida aquí, sino que se le consagra parágrafos especiales.

El § 28 ofrece la definición del volumen para cualquier cuerpo. Partiendo de los volúmenes de los cuerpos simples (divisibles en un número finito de pirámides triangulares), el volumen de cualquier cuerpo se define, en esencia, como la cota inferior máxima de los volúmenes de los cuerpos simples que lo contienen. Arrancando de esta definición general se encuentran los volúmenes de todos los cuerpos de revolución considerados en el curso escolar: cilindro, cono, esfera y sus partes. Se demuestra la aditividad del volumen para los cuerpos limitados por superficies simples (plana, cilíndrica, cónica y esférica).

El § 29 trata del área de una superficie. Partiendo de la tarea práctica de la cantidad de pintura necesaria para recubrir dos superficies, llegamos a la definición geométrica natural del concepto del área (según Minkowski). Arrancando de esta definición se encuentra, por un método standard, el área de las superficies de los cuerpos de revolución considerados en el curso escolar: cilindro, cono, esfera y sus partes.

A. V. Pogorélov

Parte primera

PLANIMETRIA

§ 1. PROPIEDADES FUNDAMENTALES DE LAS FIGURAS GEOMÉTRICAS ELEMENTALES

Geometría, palabra griega que significa medición de la tierra, es la ciencia que trata de las propiedades de las figuras geométricas empleadas para la medición de extensiones.

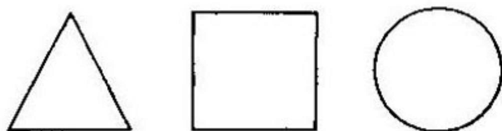


Fig. 1

El triángulo, el cuadrado y la circunferencia (fig. 1) son ejemplos de figuras geométricas.

Las figuras geométricas son muy diversas. Una parte de una figura geométrica cualquiera es, a su vez, una figura

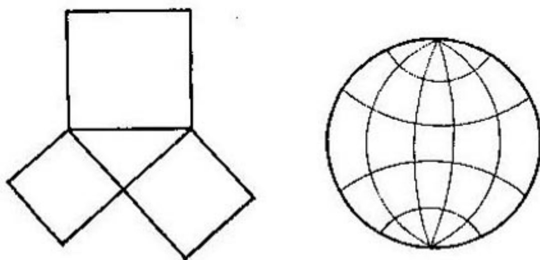


Fig. 2

geométrica. La unión de varias figuras geométricas es igualmente una figura geométrica. En la fig. 2 vemos que la figura de la izquierda consta de un triángulo y tres cuadrados, mientras que la figura de la derecha está formada por una circunferencia y partes de circunferencia. Se considera que toda figura geométrica está compuesta por puntos.

La parte de la Geometría que trata de las figuras en el plano se llama *Planimetría*. Por ella comenzaremos el estudio de la Geometría.

Punto y recta. Las figuras geométricas elementales en el plano son el *punto* y la *recta*. Los puntos y las rectas se marcan en el dibujo con un lápiz bien afilado. Para que resulte más neto, el punto se representa con un círculo pequeño. Para designar los puntos se emplean letras latinas mayúsculas: A, B, C, D, . . . Las rectas se designan por letras latinas minúsculas: a, b, c, d, . . . En la fig. 3 puede verse el punto A y la recta a.

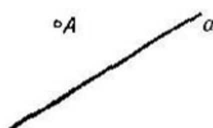


Fig. 3

Propiedades fundamentales de la pertenencia de los puntos y las rectas en el plano. En la fig. 4 están representadas las rectas a y b y los puntos A, B y C. Los puntos A y C *se hallan en la recta* a. Podemos también decir que los puntos A y C *pertenecen* a la recta a o que la recta a *pasa* por los puntos A y C.

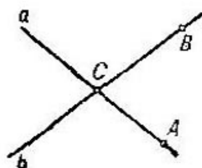


Fig. 4

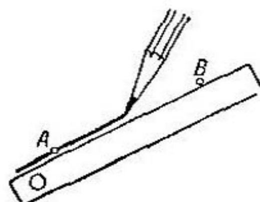


Fig. 5

El punto B se halla en la recta b pero no se halla en la recta a. El punto C se halla en la recta a y en la recta b. Las rectas a y b *se cortan* en el punto C. El punto C es el *punto de intersección de las rectas* a y b.

Para dibujar las rectas se emplea la regla. En la fig. 5 puede verse cómo se construye con la regla la recta que pasa por dos puntos A y B.

Las propiedades fundamentales de la pertenencia de los puntos y las rectas en el plano son las dos propiedades siguientes:

I_1. *Cualquiera que sea la recta, existen puntos que pertenecen a la recta y puntos que no pertenecen a la retca.*

I_2. *Cualesquiera que sean dos puntos, existe una recta que pasa por estos puntos, y sólo una.*

Una recta puede ser designada con dos puntos que se hallan en ésta. Por ejemplo, la recta a de la fig. 4 se puede designar por AC y la recta b se puede designar por BC.

Ya que por dos puntos se puede trazar solamente una recta, dos rectas distintas no se cortan o se cortan en un punto único. Si hubiese dos puntos de intersección de estas rectas, resultaría que por estos puntos pasan dos rectas diferentes. Pero esto es imposible. Luego, se obtiene la propiedad siguiente:

1.1. *Dos rectas diferentes no se cortan o se cortan en un punto único.*

Propiedades fundamentales de la posición recíproca de los puntos en la recta y en el plano. En la fig. 6 puede verse la recta a y tres puntos A, B y C situados en la misma. El punto B se encuentra *entre* los puntos A y C. Refiriéndonos

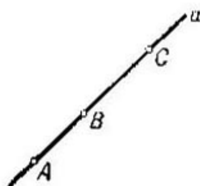


Fig. 6

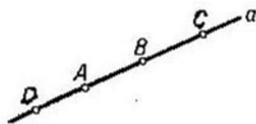


Fig. 7

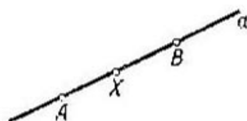


Fig. 8

a esta posición de los puntos A, B y C, diremos que los puntos A y C se hallan *a distintos lados* del punto B. También se puede decir que el punto B *separa* los puntos A y C. Los puntos A y B se hallan *a un mismo lado del* punto C y *no están separados* por el punto C. Los puntos B y C están a un mismo lado del punto A.

Fíjense en la fig. 7. El punto A *divide* la recta a en dos partes llamadas *semirrectas*. Los puntos B y C se hallan en una misma semirrecta. El punto A no los separa. Los puntos B y D se hallan en diferentes semirrectas. El punto A los separa. El punto A que divide la recta a en semirrectas se llama *punto de origen* de las semirrectas. En cuanto a las semirrectas, se las denomina *complementarias*. Una semirrecta también es llamada *rayo*.

Las semirrectas se designan con letras latinas minúsculas. Una semirrecta se puede designar también con dos puntos:

el punto de origen y otro punto suyo cualquiera. Con la particularidad de que el punto de origen siempre se coloca en primer lugar. Por ejemplo, el punto A divide la recta a (fig. 7) en dos semirrectas: AB y AD.

Supongamos que los puntos A y B se hallan en la recta a (fig. 8). Se llama *segmento* AB a la parte de la recta a cuyos puntos son todos los puntos X de la recta a situados entre A y B. Los puntos A y B se denominan *extremos* del segmento.

1.2. *El segmento AB es una parte de la semirrecta AB, o sea, todo punto del segmento AB es un punto de la semirrecta AB.*

Efectivamente, tomemos un punto X cualquiera en el segmento AB (fig. 8). Se encuentra entre los puntos A y B.

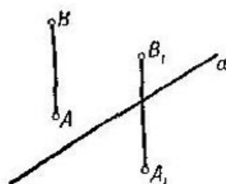


Fig. 9

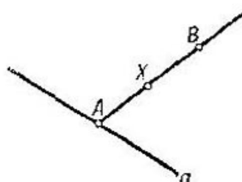


Fig. 10

Luego, el punto A no se encuentra entre los puntos X y B ya que sólo uno de los tres puntos A, X y B se halla entre los otros dos. Por consiguiente, el punto A no separa los puntos X y B. Esto significa que el punto X pertenece a la semirrecta AB y no a su complemento.

En la fig. 9 la recta *a divide* el plano en dos *semiplanos*. Los puntos A y B se hallan en un mismo semiplano. El segmento AB *no corta* la recta a. Los puntos A_1 y B_1 se hallan *en distintos semiplanos*. El segmento A_1B_1 *corta* la recta a. Designaremos los semiplanos con letras griegas α, β, γ, . . .

Tracemos por el punto de origen A de la semirrecta AB una recta a que no pase por el punto B (fig. 10). La recta a y la recta AB se cortan en el punto A. No tienen otros puntos de intersección. Tomemos en la semirrecta AB un punto X cualquiera. El segmento BX no corta la recta a.

En efecto, el segmento BX podría cortar la recta a solamente en el punto A. Pero el punto A no pertenece al segmento BX ya que no separa los puntos B y X.

Puesto que el segmento BX no corta la recta a, resulta que el punto X se halla, respecto a la recta a, en el mismo semiplano que el punto B. Así, obtenemos la propiedad siguiente:

1.3. *Si por el punto de origen A de una semirrecta AB se traza una recta a que no pase por el punto B, toda la semirrecta AB estará en un semiplano respecto a la recta a.*

Ya que el segmento AB es una parte de la semirrecta AB, obtenemos la siguiente propiedad:

1.4. *Si por el extremo A del segmento AB se traza una recta a que no pase por el punto B, todo el segmento AB quedará situado en un semiplano respecto a la recta a; a saber: estará situado en el semiplano donde se encuentra el extremo B.*

Las propiedades fundamentales de la posición recíproca de los puntos en una recta y en el plano son las tres propiedades siguientes:

II_1. *De tres puntos de una recta, uno de ellos, y sólo uno, se halla entre los otros dos.*

II_2. *Un punto situado en una recta la divide en dos semirrectas. Los puntos de una semirrecta no están separados por el punto de división. Los puntos de diferentes semirrectas están separados por este punto.*

II_3. *Toda recta divide el plano en dos semiplanos. Si los extremos de un segmento cualquiera pertenecen a un semiplano, el segmento no corta la recta. Si los extremos del segmento pertenecen a diferentes semiplanos, el segmento corta la recta.*

Propiedades fundamentales de la medición de segmentos y ángulos. Para medir los segmentos se emplean diversos instrumentos de medición. El instrumento más sencillo es la regla graduada. En la fig. 11 el segmento AB es igual



Fig. 11

a 10 cm, el segmento AC es igual a 6 cm y el segmento BC es igual a 4 cm. La longitud del segmento AB es igual a la suma de las longitudes de los segmentos AC y BC.

Las propiedades fundamentales de la medición de segmentos son las siguientes:

III$_1$. *Todo segmento tiene una longitud determinada mayor que cero.*

III$_2$. *Si el punto C de la recta AB se halla entre los puntos A y B, la longitud del segmento AB es igual a la suma de las longitudes de los segmentos AC y BC.*

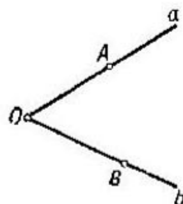


Fig. 12

Se llama *ángulo* a una figura formada por dos semirrectas distintas con un punto de origen común. Este punto se denomina *vértice del ángulo* y las semirrectas reciben el nombre de *lados* del ángulo. Si los lados de un ángulo son semirrectas complementarias de una misma recta, el ángulo se llama *llano*.

En la fig. 12 puede verse un ángulo de vértice *O* y de lados *a* y *b*. Para designar un ángulo se señala su vértice, sus lados o tres puntos: el vértice y dos puntos en los lados del ángulo. La palabra «ángulo» suele sustituirse por el símbolo $\angle$. El ángulo de

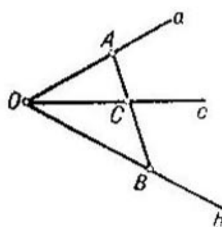


Fig. 13

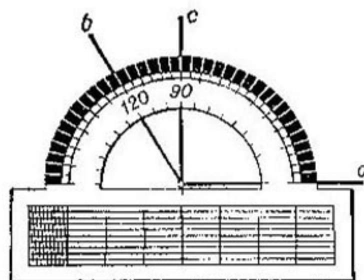


Fig. 14

la fig. 12 puede ser designado de tres formas: $\angle O$, $\angle (ab)$ y $\angle AOB$. En el tercer caso el vértice se coloca en el medio.

Fíjense en la fig. 13. Diremos que el rayo *c* que parte del vértice *O* del ángulo (*ab*) *pasa entre* sus lados si corta un segmento *AB* cualquiera cuyos extremos se hallan en los lados del ángulo. En el caso del ángulo llano, aceptamos que *cualquier rayo* que arranca de su vértice y no coincide con sus lados pasa entre los lados del ángulo.

Los ángulos se miden en grados mediante el transportador. El ángulo (ab) de la fig. 14 es igual a $120°$. La semirrecta c pasa entre los lados del ángulo (ab). El ángulo (ac) es igual a $90°$ y el ángulo (bc) es igual a $30°$. El ángulo (ab) es igual a la suma de los ángulos (ac) y (bc).

Las propiedades fundamentales de la medición de ángulos son las siguientes:

III_3. *Todo ángulo tiene una medida en grados determinada mayor que cero. El ángulo llano es igual a $180°$.*

III_4. *Si un rayo c parte del vértice de un ángulo (ab) y pasa entre sus lados, el ángulo (ab) es igual a la suma de los ángulos (ac) y (bc).*

Propiedades fundamentales de la construcción de segmentos y ángulos. Fíjense en la fig. 15. Muestra cómo se construye, valiéndose de una regla, en la semirrecta a de punto de origen A un segmento de 3 cm de longitud.

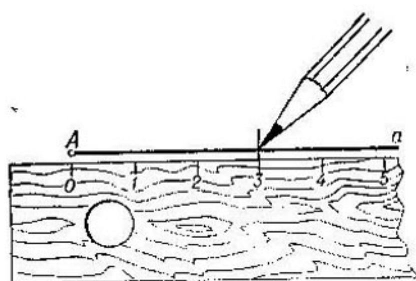


Fig. 15

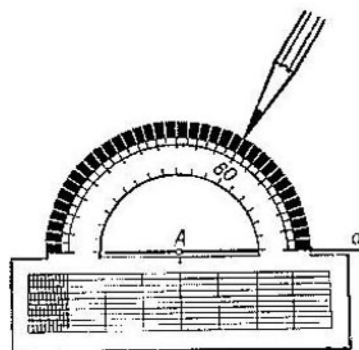


Fig. 16

Fíjense en la fig. 16. La semirrecta a, prolongada más allá de su punto de origen A, divide el plano en dos semiplanos.

La figura muestra cómo se construye, a partir de la semirrecta a y en el semiplano superior, un ángulo (de $60°$) mediante el transportador.

Las propiedades fundamentales de la construcción de segmentos y ángulos son las propiedades siguientes:

IV_1. *Cualquiera que sea el número positivo m, en una semirrecta se puede construir a partir de su punto de origen un segmento de longitud m* (cm) *y sólo uno.*

IV$_2$. *Cualquiera que sea el número positivo n menor que 180, se puede construir, a partir de una semirrecta dada y en el semiplano dado, un ángulo de n grados, y sólo uno.*

Construyamos, a partir del punto de origen A de la semirrecta AB, un segmento AC menor que AB. ¿Cuál de los puntos A, B y C se halla entre los otros dos? El punto A no puede encontrarse entre B y C ya que B y C se hallan en la misma semirrecta cuyo punto de origen es A. Si el punto B estuviese entre los puntos A y C, tendríamos, según la propiedad de la medición de segmentos, $AB + BC = AC$, o sea, $AB < AC$. Pero, por hipótesis, es $AC < AB$. Luego, el punto B tampoco se encuentra entre A y C. Puesto que uno de los puntos se halla necesariamente entre los otros dos, este punto puede ser únicamente el punto C. Así se obtiene la propiedad siguiente:

1.5. *Si en una semirrecta AB se construye, a partir de su punto de origen A, un segmento AC menor que AB, estará C entre A y B.*

Primer criterio de la igualdad de los triángulos. *Un triángulo* es una figura de tres puntos no pertenecientes a una

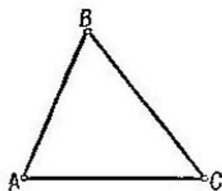


Fig. 17

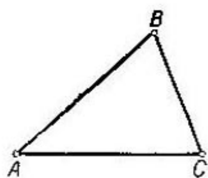


Fig. 18

misma recta y de tres segmentos que unen estos puntos de dos en dos. Los puntos se llaman *vértices* y los segmentos, *lados* del triángulo. En la fig. 17 puede observarse un triángulo de vértices A, B y C y de lados AB, BC y AC. El triángulo se designa por sus vértices. A veces en lugar de la palabra «triángulo» se emplea el símbolo Δ. Por ejemplo, el triángulo de la figura 17 se designa así: ΔABC.

Dos segmentos se denominan *iguales* si tienen la misma longitud. Dos ángulos se llaman *iguales* si tienen la misma medida angular expresada en grados. Dos triángulos ABC y $A_1B_1C_1$ se llaman *iguales* si se tiene $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$ y $AC =$

$= A_1C_1$. En la fig. 18 puede verse dos triángulos iguales ABC y $A_1B_1C_1$.

El primer criterio de la igualdad de los triángulos consiste en lo siguiente:

V. *Si en dos triángulos ABC y $A_1B_1C_1$ se tiene $\angle A = \angle A_1$, $AB = A_1B_1$ y $AC = A_1C_1$, los triángulos son iguales, es decir, también $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$ y $BC = B_1C_1$.*

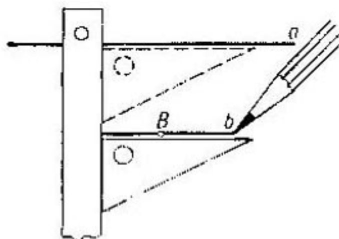


Fig. 19

Propiedad fundamental de las paralelas. En el plano se llama *paralelas* a dos rectas que no se cortan, con la particularidad de que las rectas se consideran prolongadas indefinidamente en ambas direcciones.

La fig. 19 muestra cómo se puede, empleando la escuadra y la regla, trazar por el punto B la recta b paralela a la recta a.

La propiedad fundamental de las paralelas consiste en lo siguiente:

VI. *Por todo punto B que no se halla en la recta a se puede trazar en el plano no más de una paralela a la recta a.*

Preguntas de repaso y ejercicios

1. ¿Qué es Geometría?
2. Dense ejemplos de figuras geométricas.
3. Señálense las figuras geométricas elementales en el plano.
4. ¿Qué es Planimetría?
5. ¿Cómo se representan los puntos y las rectas en el dibujo?
6. ¿Qué instrumento de dibujo se emplea para trazar rectas?
7. ¿Cómo se designan los puntos y las rectas?
8. ¿Qué puntos de la fig. 4 se hallan en la recta a y qué puntos se hallan en la recta b? ¿En qué punto se cortan las rectas a y b?
9. ¿Cómo se traza con la regla la recta que pasa por dos puntos? Tómense dos puntos en una hoja de papel y trácese por ellos la recta.
10. Enúnciense las propiedades fundamentales de la pertenencia de los puntos y las rectas en el plano.
11. ¿Por qué dos rectas diferentes no pueden tener dos puntos de intersección?
12. ¿Cuál de los tres puntos de la fig. 6 separa los otros dos? ¿En qué posición están los puntos B y C respecto al punto A?
13. Trácese una recta y tómense en ella cuatro puntos A, B, C y D de modo que el punto C separe los puntos A y D y el punto D separe los puntos B y C.

14. ¿Qué propiedades se observan al dividir una recta en dos semirrectas? ¿Cómo se designan las semirrectas?

15. ¿Qué es segmento de extremos A y B?

16. ¿Cuál de los tres puntos A, B y C se halla entre los otros dos si B es un punto del segmento AC?

17. ¿Por qué todo punto del segmento AB pertenece a la semirrecta AB?

18. ¿Qué propiedades se observan al dividir el plano en dos semiplanos?

19. ¿Cuál es la posición de la semirrecta AB respecto a una recta a que pasa por el punto A?

20. Enúnciense las propiedades fundamentales de la posición recíproca de los puntos en la recta y el plano.

21. ¿Qué instrumento se emplea para medir los segmentos?

22. Trácese una recta. Tómense en ella tres puntos A, B y C de modo que el punto B esté entre los puntos A y C. Mídanse los segmentos AB, AC y BC. Compárese la longitud del segmento AC con la suma de las longitudes de los segmentos AB y BC.

23. Enúnciense las propiedades fundamentales de la medición de los segmentos.

24. ¿Qué figura se denomina ángulo?

25. ¿Qué ángulo se denomina llano?

26. ¿Cómo se designa el ángulo?

27. Explíquese el sentido de la expresión: una semirrecta pasa entre los lados de un ángulo.

28. ¿Qué unidades y qué instrumento se emplean para medir los ángulos? ¿Cómo se realiza la medición?

29. Constrúyase un ángulo (ab) cualquiera y trácese en el interior de este ángulo un rayo c a partir de su vértice. Mídanse los ángulos (ab), (ac) y (bc). Compárese el ángulo (ab) y la suma de los ángulos (ac) y (bc).

30. Enúnciense las propiedades fundamentales de la medición de los ángulos.

31. Tómese un punto cualquiera. Trácese a partir de él una semirrecta. Constrúyase en la semirrecta desde su punto de origen un segmento igual a 5 cm.

32. Trácese una semirrecta y constrúyase a partir de ella un ángulo igual a 45°.

33. Enúnciense las propiedades fundamentales de la construcción de segmentos y ángulos.

34. En la semirrecta AB se ha construido desde su punto de origen un segmento AC menor que el segmento AB. ¿Cuál de los tres puntos A, B y C se halla entre los otros dos? Arguméntese la respuesta.

35. ¿Qué es triángulo?

36. Denomínense los vértices y los lados del triángulo de la fig. 17.

37. ¿Qué segmentos son llamados iguales?

38. ¿Qué ángulos son llamados iguales?

39. ¿Qué significado tiene la expresión: el triángulo ABC es igual al triángulo $A_1B_1C_1$?

40. Enúnciese el primer criterio de la igualdad de los triángulos.

41. ¿Qué rectas se denominan paralelas?

42. Trácese una recta cualquiera. Tómese un punto que no se halle en esta recta. Trácese por este punto la recta paralela.

43. Enúnciese la propiedad fundamental de las paralelas.

§ 2. DE CÓMO SE ESTUDIAN EN LA GEOMETRÍA LAS PROPIEDADES DE LAS FIGURAS

Axiomas, teoremas y demostraciones. La validez de una afirmación sobre la propiedad de una u otra figura geométrica se establece por medio de un razonamiento. Este razonamiento se llama *demostración*. La proposición que enuncia una propiedad de una figura geométrica se llama *teorema*. Veamos un ejemplo.

TEOREMA 2.1. *Si una recta a, que no pasa por ninguno de los vértices de un triángulo ABC, corta su lado AB, también corta uno, y sólo uno, de los otros lados, BC o AC.*

DEMOSTRACIÓN (fig. 20). La recta a divide el plano en dos semiplanos. Los puntos A y B se hallan en diferentes semiplanos ya que el segmento AB y la recta a se cortan. El

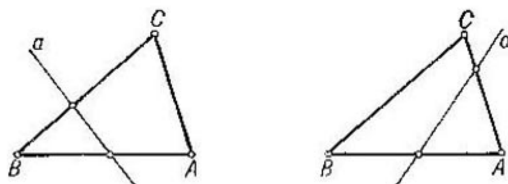


Fig. 20

punto C está en uno de estos semiplanos. Si el punto C está en el mismo semiplano que el punto A, el segmento AC y la recta a no se cortan mientras que el segmento BC corta esta recta (fig. 20, a la izquierda). Si el punto C está en el mismo semiplano que el punto B, el segmento AC corta la recta a y el segmento BC no la corta (fig. 20, a la derecha). En ambos casos la recta a corta uno de los segmentos AC o BC y sólo uno. Esta es toda la demostración.

Las propiedades fundamentales I—VI de las figuras elementales enunciadas en el parágrafo anterior son propiedades de partida para la demostración de otras. Estas propiedades no se demuestran y se llaman *axiomas*.

Los axiomas definen implícitamente los conceptos geométricos *fundamentales*. Son los conceptos expresados con las palabras «punto», «recta», «pertenecer» (para puntos y rectas), «hallarse entre» (para puntos en una recta) y «medida» (longitud de segmentos y medida gradual de ángulos). Los

demás conceptos geométricos son derivados. Se definen explícitamente partiendo de los conceptos fundamentales. Tales son, por ejemplo, los conceptos de segmento, ángulo, triángulo, etc.

En la demostración de los teoremas se pueden emplear las propiedades fundamentales de las figuras elementales, o sea, los axiomas, así como las propiedades ya demostradas, es decir, los teoremas demostrados. No se puede emplear ninguna otra propiedad de las figuras aun cuando parezca evidente.

En la demostración de los teoremas se permite emplear el dibujo para la representación geométrica de todo cuanto expresamos con palabras. Las propiedades de las figuras que evidencia el dibujo no pueden ser utilizadas si no podemos argumentarlas basándonos en los axiomas y en los teoremas demostrados anteriormente. El enunciado de un teorema consta comúnmente de dos partes. La primera trata de lo que está dado. Esta parte se llama *hipótesis* del teorema. La otra trata de lo que debe ser demostrado. Esta parte se llama *tesis* del teorema.

En el § 1, además de las propiedades fundamentales indicadas con cifras romanas, se señalan otras propiedades: 1.1; 1.2; 1.3; 1.4 y 1.5. Estas propiedades han sido obtenidas mediante razonamientos a partir de las propiedades fundamentales, es decir, de los axiomas. Luego, estas propiedades son teoremas.

Posición de los ángulos construidos en un mismo semiplano. TEOREMA 2.2. *Si a partir de una semirrecta a se construyen en un mismo semiplano dos ángulos* (ab) *y* (ac)*, el rayo b pasará entre los lados del ángulo* (ac) *o el rayo c pasará entre los lados del ángulo* (ab).

La hipótesis del teorema consiste en que los ángulos (ab) y (ac) están construidos a partir de la semirrecta a en un mismo semiplano. La tesis del teorema consiste en que el rayo b pasa entre los lados del ángulo (ac) o que el rayo c pasa entre los lados del ángulo (ab).

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA. Indiquemos por a_1 la semirrecta complementaria de a. Los ángulos (a_1b) y (a_1c) son diferentes. Luego, uno es menor que otro. Sea, por ejemplo, el ángulo (a_1b) menor que el ángulo (a_1c). Tomémos en las semirrectas a, b y a_1 los puntos A, B y A_1 (fig. 21).

La recta que contiene el rayo c corta el lado A_1A del triángulo A_1AB. Por ello, según el teorema 2.1, corta el

lado A_1B o el lado AB. El punto de intersección se halla en el rayo c ya que los segmentos A_1B y AB y el rayo c se encuentran en un mismo semiplano respecto a la recta AA_1. Es decir, el rayo c corta el segmento A_1B o el segmento AB.

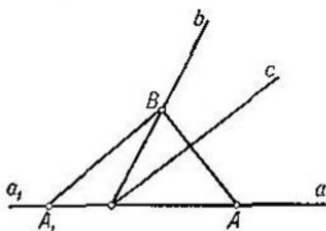


Fig. 21

Si el rayo c cortase el segmento A_1B, pasaría entre los lados del ángulo (a_1b). Según el axioma III_4 de la medición de los ángulos, tendríamos $(a_1c) + (cb) = (a_1b)$ de modo que el ángulo (a_1c) sería menor que el ángulo (a_1b). Pero esto es imposible ya que el ángulo (a_1b) es menor que el ángulo (a_1c). Por lo tanto, el rayo c no corta el segmento A_1B y, por consiguiente, corta el segmento AB. Pero esto significa al mismo tiempo que el rayo c pasa entre los lados del ángulo (ab).

Queda demostrado el teorema.

Separación de los lados de un ángulo por una recta. TEOREMA 2.3. *Si el rayo c pasa entre los lados del ángulo (ab), la recta que contiene el rayo c separa los lados del ángulos o sea, las semirrectas a y b se hallan en distintos semiplanos respecto a la recta que contiene el rayo c.*

La hipótesis del teorema consiste en que el rayo c pasa entre los lados del ángulo (ab). La tesis del teorema consiste en que los lados del ángulo (ab) se hallan en distintos semiplanos respecto a la recta que contiene el rayo c.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA. Como quiera que el rayo c pasa entre los lados del ángulo (ab), corta un segmento AB cuyos extremos se hallan en los lados del ángulo (fig. 22). Puesto que el segmento AB corta la recta que contiene el rayo c, los puntos A y B están en diferentes semiplanos respecto a esta recta.

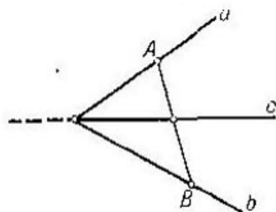


Fig. 22

Según el teorema 1.3, la semirrecta a se halla en un semiplano respecto a la recta que contiene el rayo c; a saber, en el semiplano en el que se halla el punto A. Según el mismo teorema, la semirrecta b se halla en el semiplano al que pertenece el punto B. Puesto que los puntos A y B

se hallan en distintos semiplanos respecto a la recta que contiene el rayo c, resulta que las semirrectas a y b se hallan en distintos semiplanos. Queda demostrado el teorema.

Preguntas de repaso

1. ¿Qué es demostración geométrica?
2. ¿Qué es teorema?
3. Dese un ejemplo de teorema y de su demostración.
4. ¿Qué es axioma?
5. Enúnciense los axiomas de la pertenencia de los puntos y las rectas.
6. Enúnciense los axiomas de la medición de los segmentos y los ángulos.
7. Enúnciense los axiomas de la construcción de los segmentos y los ángulos.
8. Cítense los conceptos geométricos fundamentales.
9. Dense ejemplos de conceptos geométricos derivados y dese su definición partiendo de los conceptos fundamentales.
10. ¿Qué propiedades de las figuras geométricas se permite emplear para demostrar un teorema?
11. ¿Cómo se emplea el dibujo en la demostración de un teorema?
12. ¿Cuáles son las dos partes que componen el enunciado de un teorema? ¿Cómo se denominan?
13. Enúnciese y demuéstrese el teorema sobre la posición de los ángulos construidos en un mismo semiplano (teorema 2.2).
14. Enúnciese y demuéstrese el teorema sobre la separación de los lados de un ángulo por una recta (teorema 2.3).
15. Demuéstrense los teoremas 1.1; 1.2; 1.3; 1.4; y 1.5 del § 1.

Ejercicios

16. En el plano se tienen cuatro puntos A_1, A_2, A_3 y A_4 y una recta a que no pasa por ninguno de ellos. Los segmentos A_1A_2 y A_3A_4 cortan la recta a y el segmento A_2A_3 no la corta. ¿Corta el segmento A_1A_4 la recta a? Arguméntese la respuesta.

17. En el plano se tienen cuatro puntos A, B, C y D. Demuéstrese que si los segmentos AB y CD se cortan, los puntos B y D se hallan en un mismo semiplano respecto a la recta AC.

18. Demuéstrese que si un rayo c pasa entre los lados de un ángulo (ab), corta cualquier segmento cuyos extremos se hallan en los lados del ángulo (ab).

19. Tres puntos A, B y C se hallan en una misma recta. ¿Cuál de estos puntos se encuentra entre los otros dos, si $AB = 10$ cm, $AC = 7$ cm y $BC = 3$ cm? Arguméntese la respuesta.

20. ¿Pueden hallarse tres puntos A, B y C en una misma recta, si $AB = 5$ cm, $BC = 6$ cm y $AC = 7$ cm? Arguméntese la respuesta.

21. Tres puntos A, B y C se hallan en una misma recta. El segmento AB es igual a 4 cm y el segmento BC es igual a 3 cm. ¿A qué es igual el segmento AC si el punto B se halla entre A y C? ¿A qué es igual el segmento AC, si el punto A se halla entre B y C? Arguméntense las respuestas.

22. Cuatro puntos A, B, C y D se hallan en una misma recta. El punto B se halla entre A y C y el punto C entre B y D. Demuéstrese que el punto C se halla entre A y D. (*Sugerencia.* Las semirrectas CA y CD son complementarias. El punto B se halla en la semirrecta CA.)

§ 3. ANGULOS

Angulos adyacentes. Dos ángulos se llaman *adyacentes* si tienen un lado común y sus otros lados son semirrectas complementarias. Los ángulos (a_1b) y (a_2b) de la fig. 23 son adyacentes.

Sea C un punto en la recta AB situado entre los puntos A y B y sea D un punto que no se halla en la recta AB (fig. 24).

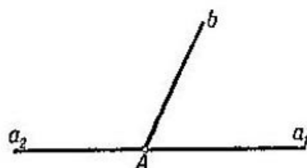


Fig. 23

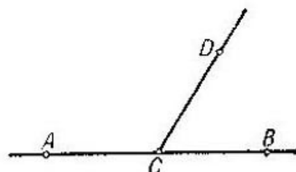


Fig. 24

Los ángulos BCD y ACD son entonces adyacentes. Tienen el lado CD común. Los lados CA y CB son semirrectas complementarias de la recta AB ya que los puntos A y B de estas semirrectas están separados por el punto de origen C.

TEOREMA 3.1. *La suma de ángulos adyacentes es igual a* 180°.

DEMOSTRACIÓN. Sean (a_1b) y (a_2b) los ángulos adyacentes dados (fig. 23). El rayo b pasa entre los lados a_1 y a_2 del ángulo llano. De aquí resulta, según el axioma III_4, que la suma de los ángulos (a_1b) y (a_2b) es igual al ángulo llano, es decir, a 180°. Queda demostrado el teorema.

Del teorema 3.1 se deduce que *si dos ángulos son iguales, también son iguales sus ángulos adyacentes.*

Angulos verticales. Dos ángulos se llaman *verticales* si los lados de un ángulo son semirrectas complementarias de los lados del otro. Los ángulos (a_1b_1) y (a_2b_2) de la fig. 25 son ángulos verticales.

TEOREMA 3.2. *Los ángulos verticales son iguales.*

DEMOSTRACIÓN. Sean (a_1b_1) y (a_2b_2) los ángulos verticales dados (fig. 25). El ángulo (a_1b_2) es adyacente del ángulo (a_1b_1) y del ángulo (a_2b_2). De aquí deducimos, según el teorema 3.1, que cada uno de los ángulos (a_1b_1) y (a_2b_2)

complementa el ángulo (a_1b_2) hasta 180°, es decir, que los ángulos (a_1b_1) y (a_2b_2) son iguales. Queda demostrado el teorema.

Angulo recto. Rectas perpendiculares. Un ángulo igual a 90° se llama *ángulo recto*. Del teorema 3.1 resulta que *el ángulo adyacente de un ángulo recto es un ángulo recto.*

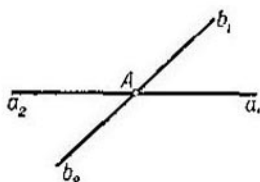


Fig. 25

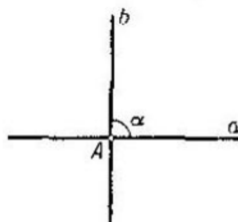


Fig. 26

Sean a y b dos rectas que se cortan (fig. 26). Las semirrectas de estas rectas forman cuatro ángulos. Sea α uno de estos ángulos. Cualquiera de los tres ángulos restantes será entonces adyacente del ángulo α o vertical del ángulo α. De aquí se deduce que si uno de los ángulos es recto, también son rectos los demás ángulos. En este caso decimos que las rectas se cortan en ángulo recto y las denominamos *perpendiculares.*

TEOREMA 3.3. *Por todo punto de una recta se puede trazar una recta perpendicular a ella y sólo una.*

DEMOSTRACIÓN. Sea a la recta dada y sea A un punto en ella. Indiquemos por a_1 una de las semirrectas de la recta a con el punto de origen A (fig. 27). Construyamos a partir de la semirrecta a_1 el ángulo (a_1b_1) igual a 90°. La recta que contiene el rayo b_1 será entonces perpendicular a la recta a.

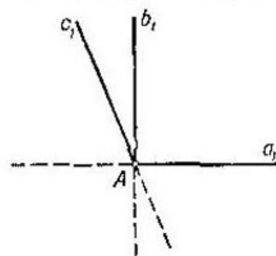


Fig. 27

Supongamos que, además de la recta construida, existe otra recta que también pasa por el punto A y es perpendicular a la recta a. Indiquemos por c_1 la semirrecta de esta recta que se halla en el mismo semiplano que el rayo b_1.

Los ángulos (a_1b_1) y (a_1c_1), iguales cada uno a 90°, han sido construidos en un mismo semiplano a partir de la semi-

rrecta a_1. Pero según el axioma IV$_2$, a partir de la semirrecta a_1 se puede construir en el semiplano dado sólo un ángulo igual a 90°. Por ello, no puede existir otra recta que pase por el punto A y sea perpendicular a la recta a. Queda demostrado el teorema.

Preguntas de repaso

1. ¿Qué ángulos se llaman adyacentes?
2. ¿Por qué son adyacentes los ángulos DCA y DCB de la fig. 24?
3. Demuéstrese que la suma de ángulos adyacentes es igual a 180°.
4. Demuéstrese que si dos ángulos son iguales, sus ángulos adyacentes también son iguales.
5. ¿Qué ángulos se llaman verticales?
6. Demuéstrese que los ángulos verticales son iguales.
7. ¿Qué ángulo se llama recto?
8. Demuéstrese que también es recto el ángulo adyacente de un ángulo recto.
9. Demuéstrese que si en la intersección de dos rectas uno de los ángulos es recto, los tres restantes también lo son.
10. Demuéstrese que por todo punto de una recta se puede trazar una recta perpendicular a ésta.

Ejercicios

11. El ángulo (ab) es igual a 120° y el ángulo (ac) es igual a 150°. ¿A qué es igual el ángulo (bc) si los rayos b y c se hallan en un mismo semiplano respecto a la recta que contiene el rayo a? ¿A qué es igual el ángulo (bc) si los rayos b y c se hallan en diferentes semiplanos respecto a la recta que contiene el rayo a?
12. ¿A qué son iguales los ángulos adyacentes si uno de ellos es dos veces mayor que el otro?
13. ¿A qué son iguales los ángulos adyacentes si uno de ellos es 30° mayor que el otro?
14. Los segmentos AB y CD se cortan en el punto O. Demuéstrese que los ángulos AOC y BOD son verticales.
15. Uno de los ángulos formados por la intersección de dos rectas es igual a 60°. Hállense los demás ángulos.

§ 4. IGUALDAD DE LOS TRIÁNGULOS

Segundo criterio de la igualdad de los triángulos. El axioma V ofrece el primer criterio de la igualdad de los triángulos. El segundo criterio se enuncia en el teorema siguiente:

TEOREMA 4.1. *Si los triángulos ABC y $A_1B_1C_1$ son tales que $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$ y $\angle B = \angle B_1$, los triángulos son iguales. O sea, también $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$ y $\angle C = \angle C_1$* (fig. 28).

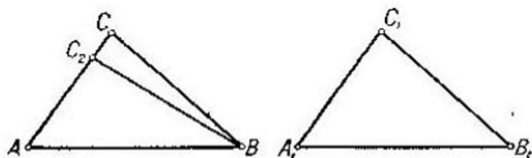


Fig. 28

DEMOSTRACIÓN. Si en estos triángulos $AC = A_1C_1$, son iguales en virtud del primer criterio de la igualdad (axioma V). Supongamos que $AC \neq A_1C_1$. Entonces nos encontramos con que $AC > A_1C_1$ o que $AC < A_1C_1$. Supongamos, para concretar, que $AC > A_1C_1$.

Construyamos en la semirrecta AC el segmento AC_2 igual a A_1C_1. Según el teorema 1.5, el punto C_2 se halla entre A y C. Los triángulos $A_1B_1C_1$ y ABC_2 son iguales debido al primer criterio de la igualdad ya que $AB = A_1B_1$ y $\angle A = \angle A_1$ por hipótesis del teorema y $AC_2 = A_1C_1$ por construcción. De la igualdad de estos triángulos resulta la igualdad de los ángulos $A_1B_1C_1$ y ABC_2. Además el ángulo $A_1B_1C_1$ es igual al ángulo ABC por hipótesis del teorema.

El rayo BC_2 pasa entre los rayos BA y BC ya que corta el segmento AC. Por ello, el ángulo ABC_2 es menor que el ángulo ABC. Hemos llegado a una contradicción, pues estos ángulos son iguales. Queda demostrado el teorema.

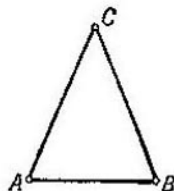


Fig. 29

Triángulo isósceles. Un triángulo se llama *isósceles* si tiene dos lados iguales. Estos lados iguales se llaman *laterales* y el tercer lado se llama *base* del triángulo (fig. 29).

TEOREMA 4.2. *En un triángulo isósceles los ángulos de la base son iguales. O sea, si $AC = BC$ en el triángulo ABC, se tiene $\angle A = \angle B$.*

DEMOSTRACIÓN El triángulo CAB es igual al triángulo CBA según el primer criterio de la igualdad de los triángulos. Efectivamente, se tiene $CA = CB$, $CB = CA$ y $\angle C = \angle C$.

De la igualdad de los triángulos resulta que $\angle A = \angle B$. Queda demostrado el teorema.

TEOREMA 4.3. *Si en un triángulo ABC se tiene $\angle A = \angle B$, el triángulo es isósceles. A saber: $AC = BC$.*

DEMOSTRACIÓN. El triángulo ABC es igual al triángulo BAC por el segundo criterio de la igualdad de los triángulos. Efectivamente, $AB = BA$, $\angle B = \angle A$ y $\angle A = \angle B$. De la igualdad de los triángulos resulta que $AC = BC$. Queda demostrado el teorema.

El teorema 4.3 es el *recíproco* del teorema 4.2. La tesis del teorema 4.2 es la hipótesis del teorema 4.3 mientras que

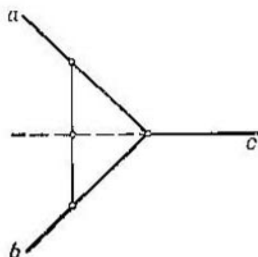


Fig. 30

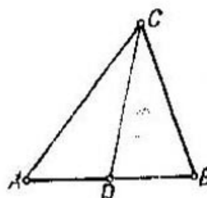


Fig. 31

la hipótesis del teorema 4.2 es la tesis del teorema 4.3. No todo teorema tiene recíproco, es decir, si el teorema es verídico, el teorema recíproco puede no serlo.

Aclaremos esto con el ejemplo del teorema 2.3. Su teorema recíproco sería el siguiente: si el rayo c parte del vértice de un ángulo (ab) y la recta que lo contiene separa los lados del ángulo, el rayo c pasa entre los lados del ángulo. Esta afirmación no es válida. Fíjense en la fig. 30. La recta que contiene el rayo c separa los lados del ángulo (ab) y, sin embargo, el rayo c no pasa entre los lados del ángulo ya que no corta ningún segmento cuyos extremos se hallan en los lados del ángulo. El rayo complementario del rayo c pasa entre los lados del ángulo (ab).

Mediana, bisectriz y altura. Sea ABC un triángulo y sea D un punto de la recta AB (fig. 31). El segmento CD se llama *mediana* del triángulo relativa al lado AB si el punto D es el punto medio del segmento AB, es decir, si $AD = BD$. El segmento CD se llama *bisectriz* del triángulo si la semirrecta CD pasa entre los lados CA y CB del triángulo y divide

el ángulo C por la mitad, o sea, si $\angle ACD = \angle BCD$. El segmento CD se llama *altura* del triángulo si las rectas AB y CD son perpendiculares.

TEOREMA 4.4. *En el triángulo isósceles la mediana relativa a la base es bisectriz y altura.*

DEMOSTRACIÓN. Sea ABC el triángulo isósceles de base AB (fig. 32). Sea CD la mediana relativa a la base. Los triángulos CAD y CBD son iguales según el primer criterio de la igualdad de los triángulos. Sus lados AC y BC son iguales por ser el triángulo ABC isósceles. Los ángulos CAD y CBD son iguales por el teorema 4.2. Los lados AD y BD son iguales porque D es el punto medio del segmento AB. De la igualdad de los triángulos resulta la igualdad de los ángulos: $\angle ACD = \angle BCD$ y $\angle ADC = \angle BDC$. Por ser iguales los ángulos ACD y BCD, resulta que CD es bisectriz. Como los ángulos ADC y BDC son adyacentes e iguales, resultan rectos y, por ello, CD es altura del triángulo. Queda demostrado el teorema.

Fig. 32

Tercer criterio de la igualdad de los triángulos. El tercer criterio de la igualdad de los triángulos se enuncia en el teorema siguiente.

TEOREMA 4.5. *Si los triangulos ABC y $A_1B_1C_1$ son tales que $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ y $BC = B_1C_1$, los triangulos son iguales. A saber, también $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ y $\angle C = \angle C_1$.*

DEMOSTRACIÓN (fig. 33). Si es $\angle A = \angle A_1$ o $\angle B = \angle B_1$, los triángulos son iguales según el primer criterio

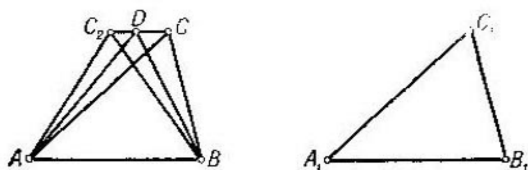


Fig. 33

de la igualdad de los triángulos. Supongamos que en los triángulos se tiene $\angle A \neq \angle A_1$ y $B \neq \angle B_1$. Construyamos a partir de la semirrecta AB en el semiplano en el que se

encuentra el punto C un ángulo igual al $\angle A_1$ y construyamos en su lado el segmento AC_2 igual a A_1C_1.

Los triángulos $A_1B_1C_1$ y ABC_2 son iguales según el primer criterio. Tienen $AB = A_1B_1$ por la hipótesis del teorema y $A_1C_1 = AC_2$ y $\angle B_1A_1C_1 = \angle BAC_2$ por construcción. De la igualdad de los triángulos resulta que $BC_2 = B_1C_1$.

Los triángulos CC_2A y CC_2B son isósceles y tienen CC_2 como base común. En ellos $AC = AC_2$ ya que $AC = A_1C_1$ y que $A_1C_1 = AC_2$; además, $BC = BC_2$ ya que $BC = B_1C_1$ y que $B_1C_1 = BC_2$.

Sea D el punto medio del segmento CC_2. El punto D no se halla en la recta AB porque el segmento CC_2 no corta esta recta. De aquí se deduce que las rectas AD y BD son diferentes.

En virtud del teorema 4.4, las rectas AD y BD son perpendiculares a la recta CC_2. Sin embargo, según el teorema 3.3, por el punto D se puede trazar solamente una recta perpendicular a la recta CC_2. Hemos llegado a una contradicción. Queda demostrado el teorema.

Preguntas de repaso

1. ¿Qué segmentos se llaman iguales?
2. ¿Qué ángulos se llaman iguales?
3. ¿Qué es triángulo?
4. ¿Qué significa la frase: el triángulo ABC es igual al triángulo PQR?
5. Enúnciese el primer criterio de la igualdad de los triángulos
6. Enúnciese y demuéstrese el segundo criterio de la igualdad de los triángulos.
7. ¿Qué triángulo se llama isósceles? ¿Qué lados del triángulo isósceles se llaman laterales? ¿Qué lado se llama base?
8. Demuéstrese que en el triángulo isósceles los ángulos de la base son iguales.
9. Demuéstrese que un triángulo con dos ángulos iguales es isósceles.
10. ¿Qué es el teorema recíproco? Dese un ejemplo. ¿Existe el recíproco de cualquier teorema?
11. Demuéstrese que en el triángulo equilátero todos los ángulos son iguales.
12. Demuéstrese que un triángulo de ángulos iguales es equilátero
13. ¿Qué son mediana, bisectriz y altura del triángulo?
14. Demuéstrese que en el triángulo isósceles la mediana relativa a la base es bisectriz y altura.
15. Demuéstrese el tercer criterio de la igualdad de los triángulos.

Ejercicios

16. Demuéstrese que si el rayo c, que parte del vértice de un ángulo (ab), pasa entre sus lados, el ángulo (ac) es menor que el ángulo (ab).

17. Muéstrese con un ejemplo que dos triángulos ABC y $A_1B_1C_1$ tales que $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$ y $\angle A = \angle A_1$ pueden no ser iguales.

18. Demuéstrese que en el triángulo isósceles la bisectriz relativa a la base es mediana y altura.

19. Demuéstrese que en el triángulo isósceles las medianas relativas a los laterales son iguales y las bisectrices relativas a los laterales son iguales.

20. Demuéstrese que los puntos medios de los lados del triángulo isósceles son vértices de otro triángulo isósceles.

21. Demuéstrese que si el triángulo ABC es igual al triángulo BCA, es equilátero.

§ 5. RELACIONES ENTRE LOS ANGULOS Y LOS LADOS DEL TRIANGULO

Relaciones entre los ángulos del triángulo. TEOREMA 5.1. *La suma de dos ángulos cualesquiera del triángulo es menor que* 180°.

DEMOSTRACIÓN. Sea ABC el triángulo dado (fig. 34). Demostremos que la suma de los ángulos de los vértices A y C es menor que 180°. Indiquemos por O el punto medio del lado AC. Construyamos en la prolongación del segmento BO el segmento OD igual a OB. Los triángulos AOD y COB son iguales. Tienen iguales los ángulos de vértice O, por ser éstos verticales, y $AO = OC$ y $OD = OB$ por construcción. De la igualdad de estos triángulos se deduce que $\angle OCB = \angle OAD$.

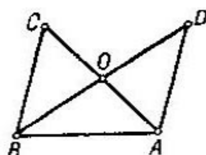


Fig. 34

El ángulo BAD es igual a la suma de los ángulos BAO y DAO ya que el rayo AO corta el segmento BD cuyos extremos se hallan en los lados del ángulo BAD. Puesto que $\angle OAD = \angle OCB$, el ángulo BAD es igual a la suma de los ángulos de vértices A y C del triángulo ABC. El ángulo BAD no es llano porque el punto D no se halla en la recta AB. Por ello, el ángulo BAD es menor que 180°. Es decir, la suma de los ángulos A y C del triángulo ABC es igual al ángulo BAD menor que 180°. Queda demostrado el teorema.

Se llama *agudo* todo ángulo menor que el recto, o sea, menor que 90°. Todo ángulo mayor que 90° pero menor que 180° se llama *obtuso.*

Del teorema 5.1 se deduce que *en cualquier triángulo hay dos ángulos agudos.* En efecto, si fuera agudo sólo un ángulo, la suma de los otros dos ángulos sería no menor que 180° a despecho del teorema 5.1.

En un triángulo ABC se llama *ángulo exterior* de vértice A al que es adyacente del ángulo de este mismo vértice en el triángulo. Para no confundir el ángulo de vértice A del triángulo con el ángulo exterior de mismo vértice, el primero se denomina *interior.*

TEOREMA 5.2. *Todo ángulo exterior del triángulo es mayor que cualquier ángulo interior no adyacente de éste.*

DEMOSTRACIÓN. Sea ABC el triángulo dado. Demostremos que el ángulo exterior de vértice A es mayor que el ángulo interior B. Según el teorema 5.1, la suma de los ángulos interiores A y B es menor que 180°, o sea, $\angle A + \angle B$ es menor que 180°. De aquí resulta que el $\angle B$ es menor que $180° - \angle A$. Pero, según la propiedad de los ángulos adyacentes, $180° - \angle A$ es la medida gradual del ángulo exterior de vértice A. Queda demostrado el teorema.

Relación entre los ángulos del triángulo y sus lados opuestos.

TEOREMA 5.3. *Si $AB > BC$ en un triángulo ABC, el $\angle C$ es mayor que el $\angle A$. Recíprocamente, si el $\angle C$ es mayor que el $\angle A$, se tiene $AB > BC$. En otras palabras, al lado mayor de un triángulo se opone el ángulo mayor y a mayor ángulo se opone mayor lado.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $AB > BC$ en el triángulo ABC (fig. 35). Consideremos en la semirrecta BA el segmento BC_1 igual a BC. El punto C_1 se halla entre A y B. La semirrecta CC_1 pasa entre CA y CB, pues corta el segmento AB. Por ello, el ángulo BCC_1 es menor que el ángulo BCA, o sea, menor que el ángulo C del triángulo ABC.

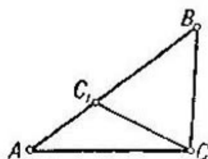


Fig. 35

Los ángulos BCC_1 y BC_1C son iguales por ser ángulos de la base del triángulo isósceles CBC_1. El $\angle BC_1C$ es el ángulo exterior de vértice C_1 del triángulo AC_1C y, por esto, es mayor que el ángulo A. Así, el $\angle C$ del $\triangle ABC$ es mayor que el $\angle A$ de este triángulo. Queda demostrada la 1ª afirmación del teorema.

Demostremos ahora que si $\angle C$ es mayor que $\angle A$, se tiene $AB > BC$. Supongamos que la afirmación no es válida. Entonces, $AB = BC$ o $AB < BC$. En el primer caso el triángulo ABC es isósceles y, por consiguiente, los ángulos A y C de su base son iguales. Pero esto contradice a la hipótesis de que el $\angle C$ es mayor que el $\angle A$. Ahora bien, si es $AB < BC$, resulta según lo demostrado que el $\angle A$ es mayor que el $\angle C$, lo que también contradice a la hipótesis. Por lo tanto, si el $\angle C$ es mayor que el $\angle A$, se tiene $AB > BC$. Queda demostrado el teorema.

Relaciones entre los lados del triángulo. TEOREMA 5.4. *En todo triángulo la suma de dos lados es mayor que el tercer lado.*

DEMOSTRACIÓN. Sea ABC el triángulo dado (fig. 36). Demostremos que $AB < AC + CB$. Consideremos en la semirrecta AC el segmento AD igual a $AC + CB$. El punto C estará entonces entre A y D y $CD = CB$. Los ángulos B y D del triángulo BCD son iguales por ser ángulos de la base de un triángulo isósceles.

Fig. 36

El ángulo ABD es mayor que el ángulo CBD ya que la semirrecta BC pasa entre BA y BD. Por consiguiente, el ángulo ABD es mayor que el ángulo ADB. Empleando el teorema 5.3, deducimos que $AD > AB$, es decir, que $AC + BC > AB$. Queda demostrado el teorema.

Desigualdad triangular. Si los puntos A y B son diferentes, la longitud del segmento AB se llama *distancia* entre estos puntos. Si los puntos A y B coinciden, la distancia entre ellos se considera igual a cero.

La desigualdad triangular es la propiedad de las distancias entre tres puntos que enuncia el teorema siguiente.

TEOREMA 5.5. *Si A, B y C son tres puntos, no necesariamente distintos, la distancia AB no es mayor que la suma de las distancias $AC + CB$.*

DEMOSTRACIÓN. Distingamos cuatro casos: 1) los tres puntos A, B y C son diferentes y no se hallan en una misma recta; 2) todos los puntos son diferentes pero se hallan en una misma recta; 3) dos puntos coinciden y 4) todos los puntos coinciden.

En el primer caso la afirmación resulta del teorema 5.4.

Consideremos el segundo caso. Aceptemos, pues, que los puntos A, B y C son diferentes pero se hallan en una misma recta. Uno de estos puntos estará entre los otros dos. Si C se halla entre A y B tenemos $AB = AC + CB$ por la propiedad de la medición de los segmentos. Si A se halla entre B y C, tenemos $AB + AC = BC$. Si B se halla entre A y C, tenemos $AB + BC = AC$. Vemos que cualquiera que sea la posición de los puntos A, B y C la distancia AB no es mayor que $AC + CB$.

Consideremos el tercer caso: dos de los tres puntos coinciden. Si coinciden los puntos A y B, se tiene $AB = 0$. Si coinciden A y C, se tiene $AB = CB$. Si coinciden B y C, se tiene $AB = AC$. Vemos que en cualquier caso de coincidencia de dos puntos, AB no es mayor que $AC + CB$.

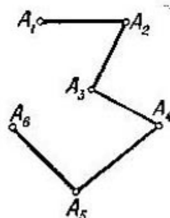


Fig. 37

En el cuarto caso, en el que los tres puntos coinciden, todas las distancias AB, BC y AC son iguales a cero y, por consiguiente, AB no es mayor que $AC + CB$.

En resumen, para cualesquiera tres puntos A, B y C la distancia AB no es mayor que la suma de las distancias $AC + CB$. Queda demostrado el teorema.

Del teorema 5.5. se deduce que cualesquiera que sean los $n + 2$ puntos $A, C_1, C_2, \ldots, C_n, B$, nunca es AB mayor que $AC_1 + C_1C_2 + C_2C_3 + \ldots + C_nB$. En efecto, según el teorema 5.5, AB no es mayor que $AC_1 + C_1B$. Según este mismo teorema, C_1B no es mayor que $C_1C_2 + C_2B$. Por ello, AB no es mayor que $AC_1 + C_1C_2 + C_2B$. Ahora bien, C_2B no es mayor que $C_2C_3 + C_3B$. Por consiguiente, AB no es mayor que $AC_1 + C_1C_2 + C_2C_3 + C_3B$. Y así sucesivamente. En definitiva se obtiene que AB no es mayor que $AC_1 + C_1C_2 + C_2C_3 + \ldots + C_nB$.

Se llama *quebrada* la figura que consta de los puntos A_1, A_2, A_3, ..., A_n con los segmentos A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$ uniendo los puntos consecutivos. Los puntos A_1, A_2, A_3, ..., A_n se llaman *vértices* de la quebrada y los segmentos A_1A_2, A_2A_3, ... se llaman *lados* de la quebrada. Los puntos A_1 y A_n se llaman *extremos* de la quebrada. Se llama *longitud* de la quebrada la suma de las longitudes de sus lados. En la fig. 37 se representa una quebrada de vértices A_1, A_2, ..., A_6.

La longitud de la quebrada no es menor que la longitud del segmento que une sus extremos.

Efectivamente, sea $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ la quebrada dada. Entonces, según hemos demostrado, la longitud del segmento A_1A_n no es mayor que la suma de las longitudes de los segmentos A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$, es decir, que la longitud de la quebrada.

Preguntas de repaso

1. ¿Qué son los ángulos del triángulo ABC?

2. Preguntas relacionadas con la demostración del teorema 5.1 (fig. 34):

1) ¿Por qué son verticales los ángulos COB y AOD?

2) ¿Por qué es el ángulo BAD igual a la suma de los ángulos CAB y CAD?

3) ¿Por qué es el ángulo BAD menor que 180°?

3. ¿Qué ángulo se llama agudo? ¿Qué ángulo se llama obtuso?

4. Demuéstrese que cualquier triángulo tiene dos ángulos agudos.

5. ¿Qué es el ángulo exterior de vértice A del triángulo ABC?

6. Demuéstrese que el ángulo exterior de todo triángulo es mayor que cualquier ángulo interior no adyacente.

7. Preguntas relacionadas con la demostración del teorema 5.3 (fig. 35):

1) ¿Por qué se halla entre A y B el punto C_1?

2) ¿Por qué es BC_1C ángulo exterior de vértice C_1 del triángulo ACC_1?

3) ¿Por qué es el ángulo BCC_1 menor que el ángulo BCA?

8. Demuéstrese que en todo triángulo la suma de dos lados es mayor que el tercero.

9. ¿Qué es la distancia entre los puntos A y B?

10. ¿En qué consiste la desigualdad triangular? Demuéstrese la desigualdad triangular.

11. ¿Qué es quebrada? Demuéstrese que la longitud de la quebrada no es menor que la distancia entre sus extremos.

Ejercicios

12. ¿Existe un triángulo de dos ángulos rectos?

13. Demuéstrese que en cualquier triángulo hay dos ángulos exteriores obtusos.

14. Demuéstrese que dos rectas perpendiculares a una tercera no se cortan.

15. En el lado AB del triángulo ABC se ha tomado un punto D. Demuéstrese que el segmento CD es menor, por lo menos, que uno de los lados AC o BC.

16. Demuéstrese que cualquier segmento cuyos extremos se hallan en los lados de un triángulo no es mayor que el lado mayor del triángulo.

17. ¿Puede tener el triángulo ABC los lados $AB = 7$ cm, $BC = 10$ cm y $AC = 18$ cm? Arguméntese la respuesta.

18. Demuéstrese que siendo $AB = BC + AC$, los tres puntos A, B y C se hallan en una misma recta.

19. Considérese la fig. 34. En ella BO es la mediana del triángulo ABC relativa al lado AC. Demuéstrese que la mediana BO es menor que la semisuma de los lados BA y BC.

20. Demuéstrese que si los vértices de una quebrada no se hallan en una recta, la longitud de la quebrada es mayor que la longitud del segmento que une sus extremos.

21. Demuéstrese que la distancia entre dos vértices cualesquiera de una quebrada cerrada no es mayor que la mitad de su longitud.

§ 6. TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Angulos y lados del triángulo rectángulo. Se llama triángulo *rectángulo* aquel que tiene un ángulo recto. Puesto que todo triángulo tiene dos ángulos agudos, *en un triángulo rectángulo sólo un ángulo es recto*. Los otros dos son agudos.

Los lados del triángulo rectángulo tienen denominaciones especiales. A saber, el lado opuesto al ángulo recto se llama *hipotenusa*. Los otros dos lados se llaman *catetos*. Los ángulos opuestos a los catetos son agudos.

Ya que en cualquier triángulo a mayor ángulo se opone mayor lado (teorema 5.3), *en el triángulo rectángulo la hipotenusa es mayor que cualquiera de los catetos*. Puesto que en cualquier triángulo la suma de dos lados es mayor que el tercero, *en el triángulo rectángulo la suma de los catetos es mayor que la hipotenusa*.

Igualdad de los triángulos rectángulos. Para los triángulos rectángulos, además de los criterios de la igualdad que conocemos, existen otros. Estos criterios de la igualdad de los triángulos rectángulos están en el teorema siguiente:

TEOREMA 6.1. *Los triángulos rectángulos ABC y $A_1B_1C_1$ de ángulos rectos C y C_1 son iguales si se cumple una de las condiciones siguientes:*

1) $BC = B_1C_1$ y $\angle A = \angle A_1$;
2) $AB = A_1B_1$ y $BC = B_1C_1$;
3) $AB = A_1B_1$ y $\angle A = \angle A_1$.

DEMOSTRACIÓN (fig. 38). Consideremos primero el caso en que se cumpla la condición 1) o la condición 2). Si se tiene $AC = A_1C_1$, los triángulos son iguales debido al primer criterio de la igualdad de los triángulos en el caso en que se cumpla la condición 1) y debido al tercer criterio de la igualdad de los triángulos en el caso en que se cumpla la condición 2).

Supongamos que $AC \neq A_1C_1$. Sea, por ejemplo, $A_1C_1 < AC$. Consideremos en la semirrecta CA el segmento CA_2

igual a C_1A_1 (fig. 38, a la izquierda). El punto A_2 estará entre A y C. Los triángulos $A_1B_1C_1$ y A_2BC son iguales en virtud del primer criterio de la igualdad. Tienen los ángulos C_1 y C rectos, $BC = B_1C_1$ por hipótesis y $A_1C_1 = A_2C$ por construcción. De la igualdad de los triángulos se deduce que $\angle BA_2C = \angle B_1A_1C_1$ y $BA_2 = B_1A_1$.

En caso de que se cumpla la condición 1), la igualdad de los ángulos BA_2C y $B_1A_1C_1$ es imposible. En efecto, el ángulo $B_1A_1C_1$ es igual al ángulo BAC. Por consiguiente, en el triángulo ABA_2 resultan iguales el ángulo exterior de vértice A_2 y el ángulo interior de vértice A. Pero esto contradice el teorema sobre el ángulo exterior del triángulo.

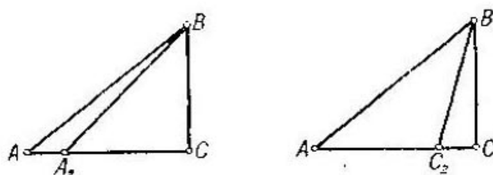


Fig. 38

En caso de que se cumpla la condición 2), la igualdad de los lados BA_2 y B_1A_1 es imposible. En efecto, tenemos $B_1A_1 = BA$. O sea, el triángulo ABA_2 es isósceles. Su ángulo de vértice A_2 es obtuso por ser el adyacente de un ángulo agudo del triángulo rectángulo BCA_2. Por lo tanto, el ángulo A es también obtuso. Pero esto es imposible.

Resumiendo, si se cumple cualquiera de las condiciones 1) o 2), debe tener lugar la igualdad $AC = A_1C_1$. En este caso, como hemos demostrado ya, los triángulos ABC y $A_1B_1C_1$ son iguales.

Supongamos ahora que para los triángulos ABC y $A_1B_1C_1$ se cumple la condición 3). Demostremos que los triángulos son iguales.

Si se tiene $AC = A_1C_1$, los triángulos ABC y $A_1B_1C_1$ son iguales debido al primer criterio ya que $AB = A_1B_1$ y $\angle A = \angle A_1$.

Aceptemos que $AC \neq A_1C_1$. Sea, por ejemplo, $AC > A_1C_1$. Tomemos en la semirrecta AC el segmento AC_2 igual a A_1C_1 (fig. 38, a la derecha). Los triángulos ABC_2 y $A_1B_1C_1$ son iguales por el primer criterio de la igualdad de los triángulos. De la igualdad de los triángulos ABC_2

y $A_1B_1C_1$ se deduce que el ángulo AC_2B es recto. Por consiguiente, el ángulo CC_2B es recto, pues es el adyacente del ángulo AC_2B. O sea, el triángulo CBC_2 tiene dos ángulos rectos. Pero esto es imposible.

Resumiendo, si se cumple la condición 3), tiene lugar la igualdad $AC = A_1C_1$. En este caso, como hemos demostrado ya, los triángulos ABC y $A_1B_1C_1$ son iguales.

Queda demostrado el teorema.

Perpendicular y oblicua. Sean a una recta, B un punto que no le pertenece y A un punto de la recta a. El segmento BA se llama *perpendicular* trazada por el punto B a la recta a, si las rectas a y AB son perpendiculares (fig. 39). El punto A se llama *pie* de la perpendicular.

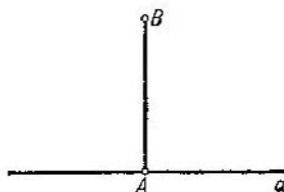


Fig. 39

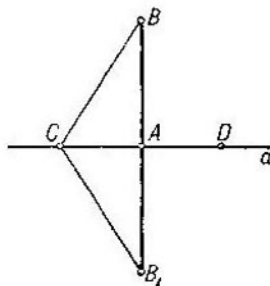


Fig. 40

TEOREMA 6.2. *Por todo punto exterior a la recta dada se puede trazar una perpendicular a esta recta y sólo una.*

DEMOSTRACIÓN. Sea a la recta dada y sea B un punto que no se halla en esta recta (fig. 40). Tomemos en la recta a dos puntos cualesquiera C y D. Si la recta BC es perpendicular a la recta a, el segmento BC es precisamente la perpendicular trazada por el punto B a la recta a.

Supongamos que BC no es perpendicular a la recta a. La recta a divide el plano en dos semiplanos. El punto B pertenece a uno de ellos. Construyamos en el otro semiplano, a partir de la semirrecta CD, un ángulo igual a BCD y consideremos en su lado el segmento CB_1 igual al segmento CB.

Los puntos B y B_1 se hallan en distintos semiplanos respecto a la recta a y, por esto, el segmento BB_1 corta esta recta en un punto A. Los triángulos CAB y CAB_1 son iguales por el primer criterio de la igualdad de los triángulos.

Tienen el lado AC común y, además, $\angle BCA = \angle B_1CA$ y $CB = CB_1$ por construcción. De aquí se deduce que son iguales los ángulos de vértice A de estos triángulos. Pero como estos ángulos son adyacentes, resultan rectos. O sea, la recta BA es perpendicular a la recta a, es decir, el segmento BA es la perpendicular trazada por el punto B a la recta a.

Aceptemos ahora que por el punto B se pueden trazar dos perpendiculares BA y BA_1 a la recta a. Entonces el triángulo BAA_1 tendrá dos ángulos rectos: el $\angle A$ y el $\angle A_1$. Pero esto es imposible. Luego, por el punto B se puede trazar una perpendicular a la recta a y sólo una. Queda demostrado el teorema.

Fig. 41

Sea BA la perpendicular trazada por el punto B a la recta a y sea C un punto cualquiera de la recta a diferente de A. El segmento BC se llama *oblicua* trazada por el punto B a la recta a (fig. 41). El punto C se llama *pie* de la oblicua. El segmento AC se llama *proyección* de la oblicua. Observando el triángulo rectángulo BAC de ángulo recto A, vemos que *la oblicua es mayor que la perpendicular*. En este triángulo la oblicua es la hipotenusa y la perpendicular, un cateto.

Se llama *distancia* entre el punto B y la recta a, que no pasa por el punto B, la longitud de la perpendicular trazada a la recta a por el punto B. Puesto que la perpendicular es menor que cualquier oblicua trazada por el mismo punto, *la distancia entre el punto B y la recta a no es mayor que la distancia entre el punto B y cualquier punto de la recta a.*

Preguntas de repaso.

1. ¿Qué se llama triángulo rectángulo?
2. Demuéstrese que el triángulo rectángulo tiene un solo ángulo recto.
3. ¿Qué lado del triángulo rectángulo se llama hipotenusa? ¿Qué lados se llamen catetos?
4. Demuéstrese que en el triángulo rectángulo la hipotenusa es mayor que cualquiera de los catetos.
5. Demuéstrese que en el triángulo rectángulo la suma de los catetos es mayor que la hipotenusa.

6. Enúnciense los criterios primero, segundo y tercero de la igualdad de los triángulos.

7. Enúnciense y demuéstrense los criterios especiales de la igualdad de los triángulos rectángulos.

8. ¿Qué es perpendicular?

9. Demuéstrese que por todo punto exterior a una recta se puede trazar una perpendicular a esta recta y sólo una.

10. ¿Qué es oblicua? ¿Qué es la proyección de una oblicua?

11. Demuéstrese que la perpendicular es menor que cualquier oblicua trazada por el mismo punto.

12. ¿Qué es distancia entre un punto B y una recta a que no pasa por el punto B? Demuéstrese que la distancia entre un punto B y una recta a no es mayor que la distancia entre el punto B y cualquier punto de la recta a.

Ejercicios

13. Demuéstrese que las oblicuas iguales, trazadas a una recta dada por un mismo punto, tienen proyecciones iguales. Y recíprocamente, que si son iguales las proyecciones de las oblicuas, también son iguales las oblicuas.

14. Demuéstrese que la altura del triángulo isósceles relativa a la base es mediana y bisectriz.

15. ¿Cómo trazar por el vértice A de un triángulo ABC una recta que corte el lado BC de manera que sean iguales las distancias entre esta recta y los vértices B y C?

16. Demuéstrese que dos bisectrices del triángulo se cortan en un punto equidistante de todos los lados del triángulo.

17. Demuéstrese que las tres bisectrices del triángulo se cortan en un punto.

18. Por el punto B se ha trazado a la recta a la oblicua BC. Demuéstrese que por el punto B se puede trazar otra oblicua BD de la misma longitud que BC.

19. Demuéstrese que por un punto no se pueden trazar tres oblicuas de igual longitud a una misma recta.

20. Por el punto B se han trazado a la recta a la perpendicular BA y dos oblicuas BC y BD. El punto D se halla entre A y C. Demuéstrese que el ángulo BDC es obtuso.

21. Demuéstrese que de dos oblicuas trazadas por un mismo punto a una recta es mayor aquella que tiene mayor proyección. Y recíprocamente, que la oblicua mayor posee mayor proyección.

§ 7. CONSTRUCCIONES GEOMÉTRICAS

En qué consisten los problemas de construcción. En los problemas de construcción se trata de construir una figura geométrica con instrumentos de dibujo dados. Estos instrumentos son en la mayoría de los casos la regla y el compás. La solución del problema consiste no tanto en la construcción de la figura como en explicar el modo de realizarla

y en efectuar la demostración correspondiente. El problema se considera resuelto si se ha señalado el método de construcción de la figura y se ha demostrado que realizando las construcciones indicadas se obtiene efectivamente la figura con las propiedades pedidas.

La regla como instrumento de construcciones geométricas permite trazar una recta cualquiera, una recta cualquiera que pasa por un punto y la recta que pasa por dos puntos. Con la regla no se puede realizar ninguna otra operación. En particular, no se puede construir segmentos aun cuando la regla esté graduada, no pueden usarse simultáneamente ambos bordes de la regla, etc.

El compás como instrumento de construcciones geométricas permite describir desde un centro la circunferencia de radio dado. En particular, el compás permite construir el segmento en una recta dada y a partir de un punto dado.

Consideremos los problemas elementales de construcción.

Construcción del triángulo de lados dados. PROBLEMA 7.1. *Constrúyase el triángulo de lados dados a, b y c* (fig. 42, a la izquierda).

SOLUCIÓN. Tracemos con la regla una recta y marquemos en ella un punto B cualquiera (fig. 42, a la derecha). Tracemos con el compás una circunferencia de centro B y de

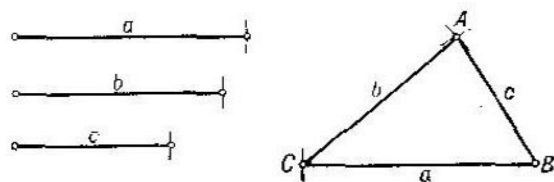


Fig. 42

radio a. Sea C su punto de intersección con la recta. Tracemos ahora una circunferencia de centro B y de radio c y otra de centro C y de radio b. Sea A el punto de intersección de estas circunferencias. Los lados del triángulo ABC son a, b y c.

El problema 7.1 no siempre tiene solución. Según el teorema 5.4, los segmentos a, b y c deben satisfacer las condiciónes $a + b > c$, $b + c > a$ y $c + a > b$.

Construcción del ángulo igual a uno dado. PROBLEMA 7.2. *Constrúyase a partir de una semirrecta y en el semiplano indicado el ángulo igual al ángulo dado.*

SOLUCIÓN. Tracemos una circunferencia cualquiera de centro en el vértice A del ángulo dado (fig. 43, a la izquierda). Sean B y C los puntos de intersección de la circunferencia y de los lados del ángulo. Tracemos una circunferencia de radio AB y de centro en el punto O, o sea, en el punto de origen de la semirrecta dada. Indiquemos por B_1 (fig. 43,

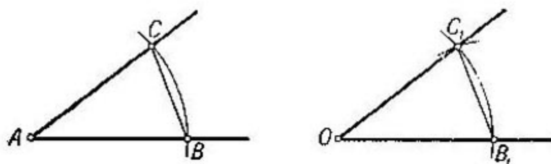


Fig. 43

a la derecha) el punto de intersección de esta circunferencia y de la semirrecta dada. Tracemos la circunferencia de centro B_1 y de radio BC. El punto C_1 de intersección de las circunferencias trazadas en el semiplano dado se halla en el lado del ángulo pedido. Para demostrarlo basta observar que los triángulos ABC y OB_1C_1 son iguales por ser triángulos de lados respectivamente iguales. Los ángulos A y O son ángulos correspondientes de estos triángulos.

División del ángulo por la mitad. PROBLEMA 7.3. *Divídase por la mitad el ángulo dado.*

SOLUCIÓN. Considerando el vértice A del ángulo dado como centro, tracemos una circunferencia de radio cualquiera (fig. 44). Sean B y C los puntos de su intersección con los lados del ángulo. Tracemos circunferencias del mismo radio y de centro en los puntos B y C. Sea D el punto de intersección de las mismas diferente de A. La semirrecta AD divide el ángulo A por la mitad. Esto resulta de la igualdad de los triángulos ABD y ACD en los que los ángulos DAB y DAC son correspondientes.

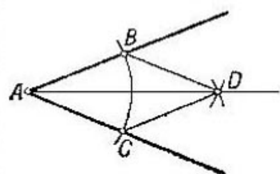


Fig. 44

División del segmento por la mitad. PROBLEMA 7.4. *Divídase por la mitad el segmento dado.*

SOLUCIÓN. Sea AB el segmento dado (fig. 45). Tracemos dos circunferencias de radio AB y de centro en los puntos A y B. Sean C y C_1 los puntos de intersección de estas circunferencias. Se hallan en semiplanos diferentes respecto a la recta AB. El segmento CC_1 corta la recta AB en un punto O. Este es precisamente el punto medio del segmento AB.

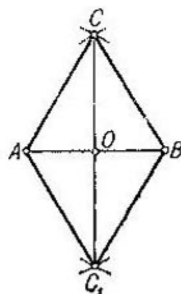


Fig. 45

Efectivamente, los triángulos CAC_1 y CBC_1 son iguales en virtud del tercer criterio de la igualdad de los triángulos. De aquí resulta la igualdad de los ángulos ACO y BCO. Entonces, los triángulos ACO y BCO son iguales por el primer criterio. Los lados AO y BO son lados correspondientes de estos triángulos y, por consiguiente, son iguales. O sea, O es el punto medio del segmento AB.

Construcción de la perpendicular. PROBLEMA 7.5. *Trácese por el punto O la perpendicular a la recta a.*

SOLUCIÓN. Se pueden presentar dos casos:

1) el punto O se halla en la recta a;

2) el punto O no se halla en la recta a.

Consideremos el primer caso (fig. 46, a la izquierda).

Tracemos una circunferencia de radio cualquiera y de centro O. Corta la recta en dos puntos A y B. Tracemos dos circunferencias de radio AB y con centros en los puntos A y B. Sea C el punto de intersección de las mismas. La recta pedida pasa por los puntos O y C. La perpendicularidad de las rectas OC y AB resulta de la igualdad de los ángulos de vértice O en los triángulos ACO y BCO. Estos triángulos son iguales por el tercer criterio de la igualdad de los triángulos.

Consideremos el segundo caso (fig. 46, a la derecha). Tracemos una circunferencia de radio cualquiera que tiene su centro en O y que corta la recta a. Sean A y B sus puntos de intersección con la recta a. Tracemos dos circunferencias de centro en los puntos A y B y del mismo radio. Sea O_1 el punto de intersección de las mismas distinto de O. La recta pedida pasa por los puntos O y O_1. Proponemos al lector argumentar esta construcción.

Lugar geométrico de puntos. Uno de los métodos de solución de problemas de construcción es el método de lugares geométricos. Se llama *lugar geométrico* de puntos una figura

formada por todos los puntos del plano que poseen una propiedad determinada. Por ejemplo, la *circunferencia* es,

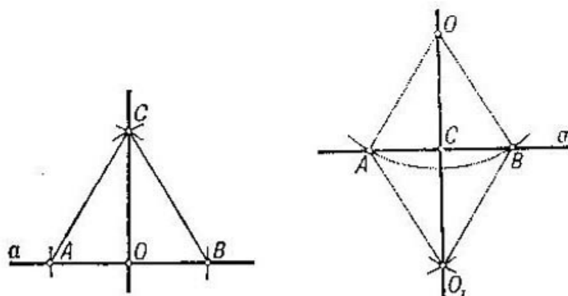


Fig. 46

por definición, el lugar geométrico de los puntos equidistantes de un punto dado. Este punto se llama *centro* de la circunferencia y la distancia entre los puntos de la circunferencia y el centro se llama *radio* de la circunferencia. Un importante lugar geométrico de puntos se enuncia en el teorema siguiente:

TEOREMA 7.6. *El lugar geométrico de los puntos equidistantes de dos puntos A y B es la recta perpendicular al segmento AB que pasa por su punto medio O* (fig. 47).

DEMOSTRACIÓN. De la igualdad de los triángulos AOC y BOC resulta que todo punto C de dicha recta equidista de los puntos A y B. En estos triángulos los ángulos de vértice O son rectos, el lado OC es común y $AO = OB$ ya que O es el punto medio del segmento AB. Probemos ahora que todo punto D del plano equidistante de los puntos A y B se halla en la recta OC.

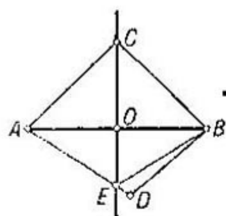


Fig. 47

Supongamos que el punto D no se halla en la recta OC. Los puntos A y B se hallan en distintos semiplanos respecto a la recta OC. Supongamos, para concretar, que el punto D se halla en el mismo semiplano que el punto B (como en la fig. 47). Entonces, el segmento AD corta la recta OC en un punto E. Según hemos demostrado, $AE = BE$. Por hipótesis, $AD = BD$. De aquí resulta que en el triángulo BDE se tiene $DB = BE + ED$. Pero esto

es imposible porque la suma de dos lados es mayor que el tercero.

Método de lugares geométricos. La esencia del método de lugares geométricos aplicado a la resolución de problemas de construcción consiste en lo siguiente. Supongamos que al resolver un problema de construcción tengamos que construir un punto X que cumpla dos condiciones: la condición 1) y la condición 2). El lugar geométrico de los puntos que satisfacen la condición 1) es una figura F_1 y el lugar geométrico de los puntos que satisfacen la condición 2) es una figura F_2. El punto pedido X pertenece a F_1 y a F_2, o sea, es el punto de intersección de estas figuras. Si nuestros lugares geométricos son simples, es decir, están formados por rectas y circunferencias, podemos construirlos y de este modo hallar el punto pedido X. Veamos un ejemplo.

Se llama circunferencia *circunscrita* a un triángulo a la que pasa por cada uno de sus vértices.

PROBLEMA 7.7. *Constrúyase la circunferencia que circunscribe el triángulo dado ABC.*

SOLUCIÓN (fig. 48). El centro O de la circunferencia pedida equidista de los tres vértices A, B y C. Podemos también decir que el centro O satisface dos condiciones: 1) el centro de la circunferencia equidista de los vértices A y C; 2) el centro de la circunferencia equidista de los vértices B y C. El lugar geométrico de los puntos que satisfacen la primera condición es la perpendicular al lado AC que pasa por su punto medio D. El lugar geométrico de los puntos que satisfacen la segunda condición es la perpendicular al segmento BC trazada por su punto medio E. Por lo tanto, el centro O de la circunferencia circunscrita se halla en la intersección de estas perpendiculares.

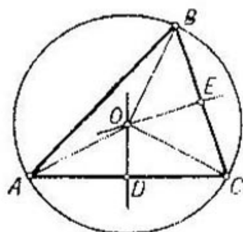


Fig. 48

De aquí se desprende un importante corolario. Puesto que el centro O de la circunferencia circunscrita se halla a igual distancia de los puntos A y B, resulta, según el teorema 7.6, que está en la perpendicular al segmento AB trazada por su punto medio. Esto implica que *las tres rectas, que pasan por los puntos medios de los lados del triángulo y que*

son perpendiculares a estos lados, se cortan en un punto que es el centro de la circunferencia circunscrita.

La aplicación del método de lugares geométricos no siempre resulta tan sencilla como en el problema 7.7. Consideremos un ejemplo más complejo.

PROBLEMA 7.8. *Sean dados una recta a, un punto A de la misma y un punto B que no se halla en la recta a* (fig. 49). *Indíquese en la recta a un punto X tal que $AX + XB$ sea igual a un segmento dado m.*

SOLUCIÓN. Las dos condiciones que debe satisfacer el punto X pueden ser representadas así: 1) el punto X se halla en la recta a; 2) $AX + XB = m$. El lugar geométrico de los puntos que satisfacen la primera condición es la propia recta a. Pero el lugar geométrico de los puntos que satisfacen la segunda condición es bastante complejo. No se reduce a rectas y circunferencias. Es decir, no basta con determinar la posición del punto X mediante dos condiciones, sino que es preciso también que cada una de ellas defina un lugar geométrico simple formado por rectas y circunferencias. Saber formular estas condiciones es lo esencial en la solución del problema.

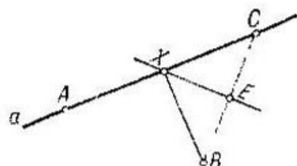


Fig. 49

Veamos como determinar estas condiciones en nuestro problema. Supongamos que el problema ha sido resuelto. Tomemos en la semirrecta AX el segmento AC igual a m. Entonces $XC = XB$, o sea, el punto X equidista de los puntos B y C. Podemos enunciar ahora las dos condiciones que determinan la posición del punto X así: 1) el punto X se halla en el segmento AC; 2) el punto X equidista de los puntos B y C. El primer lugar geométrico es el segmento AC y el segundo lugar geométrico es la recta perpendicular al segmento BC trazada por su punto medio E. El punto X está en la intersección de estos lugares geométricos.

Preguntas de repaso

1. ¿Cómo construir el triángulo dados sus tres lados? ¿En qué caso es insoluble el problema, es decir, no existe el triángulo de los lados dados?

2. ¿Cómo construir a partir de una semirrecta y en el semiplano indicado un ángulo igual al ángulo dado?

3. ¿Cómo dividir por la mitad el ángulo?
4. ¿Cómo dividir por la mitad el segmento?
5. ¿Cómo trazar una perpendicular por un punto a una recta?
6. ¿Qué es lugar geométrico de puntos?
7. ¿Qué representa el lugar geométrico de los puntos equidistantes de dos puntos?
8. ¿En qué consiste la solución de los problemas de construcción por el método de lugares geométricos? Dense ejemplos de problemas de construcción que se resuelven por el método de lugares geométricos.

Ejercicios

9. Constrúyase el segmento igual a la suma (a la diferencia) de dos segmentos.
10. Constrúyase el ángulo igual a la diferencia de dos ángulos.
11. Constrúyase el segmento igual a $\frac{1}{4}$ del segmento dado.
12. Constrúyase el ángulo igual a $\frac{1}{4}$ del ángulo dado.
13. Constrúyase el triángulo ABC a tenor con las condiciones siguientes:
 1) dados el ángulo A y los lados AB y AC;
 2) dados el ángulo A y los lados AB y BC;
 3) dados los ángulos A y B y el lado AB.
14. Constrúyase el triángulo dados sus lados AB y BC y la mediana relativa a uno de los lados AB o AC.
15. Constrúyase el triángulo dados sus lados AB y BC y la altura trazada desde el vértice A.
16. Constrúyase el punto que se halla a igual distancia de los puntos A y B y a una distancia dada del punto C.
17. Demuéstrese que el lugar geométrico de los puntos equidistantes de dos rectas secantes consta de las bisectrices de los ángulos formados por estas rectas.
18. Sea ABC un triángulo. Constrúyanse todos los puntos equidistantes de las rectas AB, BC y AC.
19. Constrúyase el punto que se halla a igual distancia de dos rectas y a una distancia determinada de un punto.

§ 8. RECTAS PARALELAS

Criterios de paralelismo de rectas. TEOREMA 8.1. *Si la recta c es paralela a las rectas a y b , las rectas a y b son paralelas.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que las rectas a y b no son paralelas. Entonces se cortan en un punto C. O sea, por el punto C pasan dos rectas paralelas a la recta c. Pero esto es imposible en virtud del axioma VI. Según este axioma, por un punto que no se halla en la recta dada se puede

trazar a lo sumo una recta paralela. Queda demostrado el teorema.

Del teorema 8.1 se deduce que *si una recta corta una de las dos rectas paralelas, también corta la otra.*

Sean AB y CD dos rectas. Sea AC otra recta que corta las rectas AB y CD (fig. 50). La recta AC se llama *secante* de las rectas AB y CD. Los ángulos formados por las rectas AB y CD y la secante AC tienen nombres especiales. Si los puntos B y D se hallan en un mismo semiplano respecto

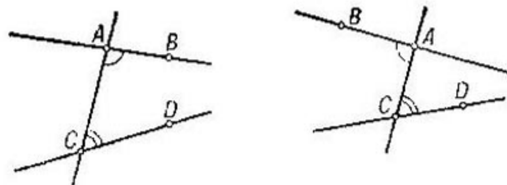


Fig. 50

a la recta AC, los ángulos BAC y DCA se denominan *correspondientes internos* (fig. 50, a la izquierda). Si los puntos B y D están en diferentes semiplanos respecto a la recta AC, los ángulos BAC y DCA se llaman *alternos internos* (fig. 50, a la derecha).

La secante AC forma con las rectas AB y CD dos pares de ángulos correspondientes internos y dos pares de ángulos alternos internos. De la propiedad de los ángulos adyacentes se deduce que al ser iguales los ángulos alternos internos de un par, los ángulos alternos internos del otro par también son iguales y la suma de los ángulos correspondientes internos de cada uno de los pares es igual a 180°. Recíprocamente, si la suma de un par de ángulos correspondientes internos es igual a 180°, la suma del otro par de ángulos correspondientes internos es también igual a 180° y los ángulos alternos internos de cada uno de los pares son iguales.

TEOREMA 8.2. *Sean a y b dos rectas y c una secante de las mismas. Si las rectas a y b son paralelas, los ángulos alternos internos son iguales y la suma de los ángulos correspondientes internos es igual a* 180°. *Recíprocamente, si los ángulos alternos internos son iguales o los ángulos correspondientes internos suman* 180°, *las rectas a y b son paralelas.*

DEMOSTRACIÓN. Comencemos por la segunda afirmación del teorema. Supongamos que las rectas a y b no son parale-

las, o sea, que se cortan en un punto C (fig. 51). Consideremos el triángulo ABC. Según el teorema 5.1, la suma de los ángulos A y B de este triángulo es menor que 180°. Pero estos ángulos son correspondientes internos y la suma de los mismos es igual a 180° por hipótesis. Hemos llegado a una contradicción. Queda demostrada la segunda afirmación del teorema.

Demostremos la primera afirmación del teorema. Sean, pues, a y b rectas paralelas. Tracemos por el punto A una recta a_1 de modo que la suma de los ángulos correspondientes internos que forma la secante c con las rectas a_1

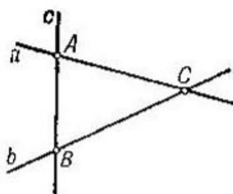


Fig. 51

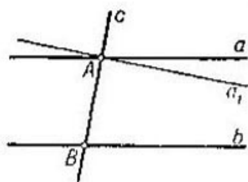


Fig. 52

y b sea igual a 180° (fig. 52). Entonces, según hemos demostrado, la recta a_1 será paralela a b. Pero por el punto A pasa sólo una recta paralela a b. Luego, las rectas a y a_1 coinciden. Es decir, la suma de los ángulos correspondientes internos formados por la secante c y las paralelas a y b es igual a 180° y, por consiguiente, los ángulos alternos son iguales. Queda demostrado completamente el teorema.

Del teorema 8.2 resulta que *dos rectas perpendiculares a una tercera son paralelas. Si una recta es perpendicular a una de las rectas paralelas, también es perpendicular a la otra.*

Suma de los ángulos del triángulo. TEOREMA 8.3. *La suma de los ángulos del triángulo es igual a* 180°.

DEMOSTRACIÓN. Sea ABC el triángulo dado (fig. 53). Marquemos el punto medio O del lado BC del triángulo. Construyamos en la semirrecta complementaria a la semirrecta OA el segmento OD igual al segmento OA. Los triángulos BOD y COA son iguales, ya que los ángulos de vértice O son iguales por ser verticales y, además, $OB = OC$ y $OA = OD$ por construcción. De la igualdad de los triángulos resulta que el ángulo DBO es igual al ángulo ACO.

Para las rectas AC y BD y la secante BC son alternos internos los ángulos DBO y ACO. En efecto, los puntos A

y D se hallan en diferentes semiplanos respecto a la recta BC ya que el segmento AD corta la recta BC (en el punto O). Según el teorema 8.2, la igualdad de los ángulos alternos internos DBO y ACO implica que las rectas AC y BD son paralelas.

Para las rectas AC y BD y la secante AB son correspondientes internos los ángulos DBA y CAB. Efectivamente, los puntos C y D se hallan en un mismo semiplano respecto a la recta AB; a saber, en el semiplano al que pertenece el punto O. Puesto que las rectas AC y BD son paralelas, los ángulos correspondientes internos CAB y DBA suman 180°.

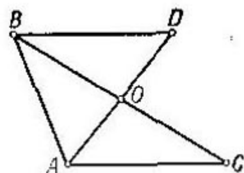


Fig. 53

El ángulo DBA es igual a la suma de los ángulos DBC y ABC ya que el rayo BC corta el segmento AD cuyos extremos están en los lados del ángulo ABD. Según hemos demostrado, el ángulo DBC es igual al ángulo ACB. Por consiguiente, la suma de los ángulos del triángulo ABC, o sea, la suma $\angle BCA + \angle ABC + \angle CAB$, es igual a la suma de los ángulos correspondientes internos formados por las paralelas, es decir, es igual a 180°. Queda demostrado el teorema.

En el triángulo rectángulo un ángulo es recto y los otros dos son agudos. Del teorema 8.3 se deduce que *en el △ rectángulo los ángulos agudos se complementan hasta* 90°.

TEOREMA 8.4. *Todo ángulo exterior del triángulo es igual a la suma de dos ángulos interiores no adyacentes a él.*

DEMOSTRACIÓN. Sea ABC el triángulo dado. Según el teorema 8.3, se tiene $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$. De aquí resulta que $\angle A + \angle B = 180° - \angle C$. En el segundo miembro de esta igualdad figura la medida gradual del ángulo exterior de vértice C del △. Queda demostrado el teorema.

Las paralelas como rectas equidistantes. TEOREMA 8.5. *Las rectas paralelas equidistan, o sea, todos los puntos de una recta están a una misma distancia de la otra recta.*

DEMOSTRACIÓN. Sean a y b dos rectas paralelas (fig. 54). Tomemos en la recta a dos puntos cualesquiera A y A_1 y tracemos por ellos las perpendiculares AB y A_1B_1 a la recta b. Las rectas AB y A_1B_1 son perpendiculares a la recta b y, por consiguiente, también son perpendiculares a la recta paralela a.

Los ángulos BA_1A y A_1BB_1 son correspondientes internos o alternos internos respecto a la secante A_1B. Puesto que ambos son agudos, la suma de los mismos es menor que 180°. Por ello, no pueden ser correspondientes internos de las paralelas. O sea, los ángulos BA_1A y A_1BB_1 son alternos internos de las paralelas y por esto son iguales.

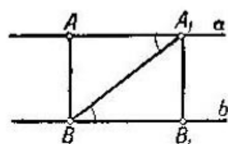


Fig. 54

Los triángulos rectángulos BAA_1 y A_1B_1B son iguales. Tienen la hipotenusa A_1B común y los ángulos agudos AA_1B y A_1BB_1 son iguales según lo demostrado. De la igualdad de los triángulos deducimos que $AB = A_1B_1$, o sea, que son iguales las perpendiculares trazadas a la recta b por los puntos A y A_1 de la recta a. Queda demostrado el teorema.

PROBLEMA 8.6. *Hállese el lugar geométrico de los puntos que pertenecen a un mismo semiplano respecto a la recta a y que equidistan de esta recta.*

SOLUCIÓN. Tomemos un punto cualquiera A del lugar geométrico y tracemos por él la recta a_1 paralela a la recta a (fig. 55). Demostremos que esta recta abarca todos los puntos del lugar geométrico.

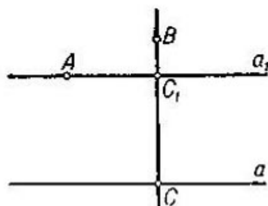


Fig. 55

Sea B un punto cualquiera del lugar geométrico. Tracemos por el punto B la recta perpendicular a la recta a. Corta la recta a en un punto C y la recta a_1 en un punto C_1. Como el punto C no separa los puntos C_1 y B, de la igualdad $C_1C = BC$ se deduce que los puntos B y C coinciden, o sea, que el punto B se halla en la recta a_1.

Por consiguiente, *el lugar geométrico de los puntos del plano que se encuentran en un mismo semiplano respecto a la recta a y que equidistan de esta recta es una recta paralela a la recta a.*

PROBLEMA 8.7. *Trácese por un punto B la recta paralela a la recta a.*

SOLUCIÓN. Trazamos por el punto B la recta b perpendicular a la recta a (problema 7.5). Trazamos por el punto B la recta c perpendicular a b. La recta c es paralela a la recta a.

Preguntas de repaso

1. ¿Qué rectas se llaman paralelas?
2. Enúnciese el axioma de las paralelas.
3. Demuéstrese el teorema 8.1: si la recta a es paralela a las rectas b y c, las rectas b y c son paralelas.
4. Demuéstrese que si una recta corta una de las dos rectas paralelas, también corta la otra.
5. ¿Qué ángulos se denominan correspondientes internos? ¿Qué ángulos se denominan alternos internos?
6. Sean ABC un triángulo, B_1 un punto en su lado AB y C_1 un punto en el lado AC. Señálense los ángulos correspondientes internos y alternos internos de las rectas AB y AC y la secante B_1C_1.
7. Demuéstrese que si los ángulos alternos internos de un par son iguales, los ángulos alternos internos del otro par también son iguales y los ángulos correspondientes internos de cada uno de los pares suman 180°. Recíprocamente, si la suma de los ángulos correspondientes internos de uno de los pares es igual a 180°, los ángulos correspondientes internos del otro par también suman 180° y los ángulos alternos internos de cada uno de los pares son iguales.
8. Enúnciese y demuéstrese el teorema de los ángulos de dos paralelas y una secante.
9. Preguntas relacionadas con la demostración del teorema 8.3 sobre la suma de los ángulos del triángulo (fig. 53):
   1) ¿Por qué los ángulos CBD y BCA son internos alternos para las rectas AC y BD y la secante BC?
   2) ¿Por qué los ángulos ABD y BAC son correspondientes internos para las rectas AC y BD y la secante AB?
   3) ¿Por qué el ángulo ABD es igual a la suma de los ángulos ABC y DBC?
10. Demuéstrese que el ángulo exterior del triángulo es igual a la suma de dos ángulos interiores no adyacentes a él.
11. ¿Cuánto suman los ángulos agudos del triángulo rectángulo?
12. ¿Cuánto valen los ángulos del triángulo equilátero?
13. Demuéstrese que las rectas paralelas equidistan.

Ejercicios

14. Sean a y b dos rectas paralelas. Demuéstrese que la recta b se halla en un semiplano respecto a la recta a.
15. ¿Qué es mayor: la base o el lateral del triángulo isósceles si el ángulo de su vértice es igual a 57°?
16. ¿Cuánto valen los ángulos del triángulo si están en proporción de 1 : 2 : 3?
17. ¿Cuánto valen los ángulos del triángulo rectángulo isósceles?
18. Demuéstrese que en el triángulo rectángulo de ángulo agudo de 30° el cateto opuesto a este ángulo es igual a la mitad de la hipotenusa.
19. Sea ABC un triángulo. ¿Cómo trazar por el vértice A una recta de modo que los vértices B y C equidisten de la recta y ésta no corte el lado BC?
20. Sea ABC un triángulo isósceles de base AB y de laterales AC y BC. Demuéstrese que es constante la suma de las distancias entre las rectas AC y BC y un punto X cualquiera de la base AB.

Cuadriláteros convexos. Recibe el nombre de *cuadrilátero* una figura $ABCD$ formada por cuatro puntos A, B, C y D, que de tres en tres no se hallan en una misma recta, y por cuatro segmentos AB, BC, CD y AD que unen estos puntos (fig. 56). Los puntos A, B, C y D se llaman *vértices* del cuadrilátero y los segmentos AB, BC, CD y DA son sus *lados*.

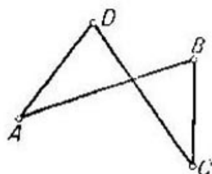


Fig. 56

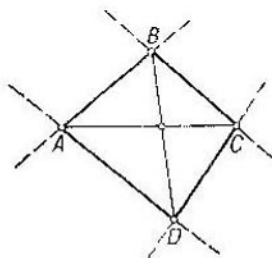


Fig. 57

Los vértices A y C y los vértices B y D se denominan vértices *opuestos*. Los lados AB y CD y los lados BC y AD se llaman lados *opuestos*.

Un cuadrilátero se llama *convexo* si se encuentra en un mismo semiplano respecto a la recta que contiene cualquiera de sus lados (fig. 57). Los segmentos que unen los vértices opuestos del cuadrilátero se denominan *diagonales*.

TEOREMA 9.1. *Las diagonales del cuadrilátero convexo se cortan.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $ABCD$ el cuadrilátero convexo dado (fig. 57). Los puntos B y C se hallan en un mismo semiplano respecto a la recta AD puesto que el cuadrilátero es convexo. Las semirrectas AC y AB están en un mismo semiplano respecto a la recta AD.

Según el teorema 2.2, el rayo AC pasa entre los lados del ángulo BAD o el rayo AB pasa entre los lados del ángulo CAD. Pero el rayo AB no puede pasar entre los lados del ángulo CAD ya que los puntos C y D se hallan en un mismo semiplano respecto a la recta AB. Por consiguiente, el rayo AC pasa entre los lados del ángulo BAD, o sea, el segmento BD corta la recta AC (según el teorema 2.3). Es decir, la diagonal BD corta la recta AC. Análogamente, con-

siderando los ángulos ABC y ABD, demostraremos que la diagonal AC corta la recta BD.

Puesto que la diagonal BD corta la recta AC, las rectas BD y AC se cortan. Pero las rectas AC y BD pueden tener sólo un punto de intersección. En la recta AC es un punto de la diagonal AC y en la recta BD es un punto de la diagonal BD; o sea, las diagonales AC y BD se cortan. Queda demostrado el teorema.

TEOREMA 9.2. *La suma de los ángulos del cuadrilátero convexo es igual a* 360°.

DEMOSTRACIÓN. Sea $ABCD$ el cuadrilátero convexo dado (fig. 57). La semirrecta DB pasa entre las semirrectas DA y DC ya que corta el segmento AC. Por ello, el ángulo D del cuadrilátero es igual a la suma de los ángulos ADB y CDB. Idénticamente se demuestra que el ángulo B del cuadrilátero es igual a la suma de los ángulos ABD y CBD. De aquí resulta que la suma de los ángulos del cuadrilátero es igual a la suma de los ángulos de dos triángulos BAD y BCD, o sea, es igual a 360°. Queda demostrado el teorema.

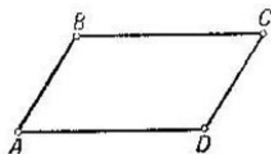


Fig. 58

Paralelogramo. El *paralelogramo* es un cuadrilátero en el que los lados opuestos son paralelos, es decir, se hallan en rectas paralelas (fig. 58).

El paralelogramo es un cuadrilátero convexo. En efecto, sea $ABCD$ el paralelogramo dado. Tomemos un lado cualquiera del paralelogramo, digamos AD. Como la recta BC es paralela a la recta AD, el segmento BC no corta la recta AD. Esto significa que los puntos B y C se hallan en un mismo semiplano respecto a la recta AD. En este mismo semiplano están los segmentos BC, AB y DC. Es decir, el paralelogramo se halla en un semiplano respecto a la recta que contiene su lado AD. Tomando otro lado cualquiera del paralelogramo, llegamos a la misma conclusión. Esto significa que el paralelogramo es un cuadrilátero convexo.

TEOREMA 9.3. *Los lados opuestos y los ángulos opuestos del paralelogramo son iguales.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $ABCD$ el paralelogramo dado (fig. 59). Tracemos las diagonales AC y BD del paralelogramo. Se cortan en un punto O. Los ángulos BCA y DAC son alternos internos de las paralelas AD y BC y la secante AC

ya que los puntos B y D se encuentran en diferentes semiplanos respecto a la recta AC (el segmento BD corta la recta AC). Por consiguiente, los ángulos BCA y DAC son iguales. Análogamente deducimos que los ángulos BAC y DCA también son iguales.

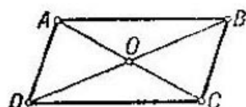


Fig. 59

Los triángulos ACB y CAD son iguales. Tienen el lado AC común y, según hemos demostrado, $\angle BCA = \angle DAC$ y $\angle BAC = \angle DCA$. De la igualdad de los triángulos resulta que $BC = AD$ y que $\angle ABC = \angle CDA$. Análogamente se demuestra que $AB = CD$ y que $\angle BAD = \angle DCB$. Queda demostrado el teorema.

TEOREMA 9.4. *Las diagonales del paralelogramo se cortan en el punto medio de ambas.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $ABCD$ el paralelogramo dado y sea O el punto de intersección de sus diagonales (fig. 59). Los triángulos AOD y COB son iguales. Sus lados BC y AD son iguales por ser lados opuestos del paralelogramo. Los ángulos OBC y ODA son iguales por ser alternos internos de las paralelas BC y AD y la secante BD. Los ángulos OCB y OAD son iguales, pues son alternos internos de las paralelas BC y AD y la secante AC. De la igualdad de los triángulos resulta que $OB = OD$ y que $OA = OC$. Queda demostrado el teorema.

TEOREMA 9.5. *Si dos lados opuestos de un cuadrilátero convexo son paralelos e iguales, el cuadrilátero es un paralelogramo.*

Si los lados opuestos de un cuadrilátero convexo son iguales, el cuadrilátero es un paralelogramo.

DEMOSTRACIÓN. Sea $ABCD$ el cuadrilátero convexo dado en el que los lados AD y BC son iguales (fig. 60). En ambos casos los triángulos ABD y CDB son iguales. En el caso de la primera parte del teorema son iguales por el primer criterio de la igualdad y en el caso de la segunda parte, por el tercer criterio.

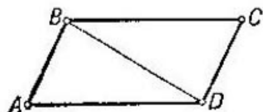


Fig. 60

De la igualdad de los triángulos resulta la igualdad de los ángulos $\angle CBD = \angle ADB$ y $\angle ABD = \angle CDB$. Pero estos ángulos son alternos internos para las rectas BC y AD y para las

rectas AB y CD. La igualdad de los ángulos alternos internos implica que la recta BC es paralela a la recta AD y que la recta CD es paralela a la recta AB; o sea, el cuadrilátero $ABCD$ es un paralelogramo. Queda demostrado el teorema.

Rectángulo. Rombo. Cuadrado. El *rectángulo* es un cuadrilátero en el que todos los ángulos son rectos (fig. 61).

TEOREMA 9.6. *Todo rectángulo es un paralelogramo. Las diagonales del rectángulo son iguales* (fig. 61).

DEMOSTRACIÓN. Sea $ABCD$ el rectángulo dado. Las rectas AD y BC son paralelas, pues son perpendiculares a la recta AB. Las rectas AB y CD son perpendiculares a la recta AD y, por esto, son también paralelas. Por consiguiente, el rectángulo es un paralelogramo.

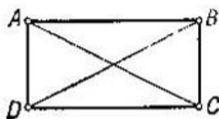


Fig. 61

La segunda afirmación del teorema resulta de la igualdad de los triángulos rectángulos BAD y CDA. Tienen los ángulos BAD y CDA rectos, el cateto AD común y los catetos AB y DC iguales, pues son lados opuestos del paralelogramo. De la igualdad de los triángulos resulta que sus hipotenusas son iguales. Pero las hipotenusas son las diagonales del rectángulo. Queda demostrado el teorema.

El *rombo* es un paralelogramo con todos los lados iguales (fig. 62).

TEOREMA 9.7. *Las diagonales del rombo se cortan en ángulo recto. Las diagonales del rombo son bisectrices de sus ángulos.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $ABCD$ el rombo dado (fig. 62) y sea O el punto de intersección de sus diagonales. Los triángulos AOB y COB son iguales. Tienen el lado OB común, $AB = CB$ por definición de rombo y $OA = OC$ por el teorema 9.4. De la igualdad de los triángulos resulta que $\angle AOB = \angle COB$ y que $\angle ABO = \angle CBO$.

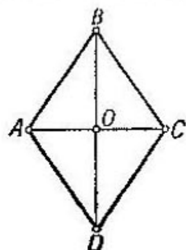


Fig. 62

Ya que los ángulos AOB y COB son iguales y adyacentes, son rectos. Queda demostrada la primera afirmación.

Puesto que el rayo BD pasa entre los lados del ángulo ABC y que los ángulos ABO y CBO son iguales, BD es la bisectriz del ángulo ABC. Queda demostrada la segunda afirmación.

El *cuadrado* es un rectángulo con todos los lados iguales.

El cuadrado es también un rombo y, por ello, posee las propiedades de rectángulo y de rombo.

Trapecio. TEOREMA 9.8. *Supongamos que tres rectas paralelas a, b y c cortan las rectas d y d_1 en los puntos A, B y C y en los puntos A_1, B_1 y C_1, respectivamente* (fig. 63).

Si el punto B se halla entre A y C, el punto B_1 se encuentra entre A_1 y *C_1. Si $AB = BC$, también $A_1B_1 = B_1C_1$.*

DEMOSTRACIÓN Los puntos A y C se encuentran en diferentes semiplanos respecto a la recta b ya que el segmento AC corta la recta b (en el punto B). Los puntos A y A_1 se hallan en un mismo semiplano respecto a la recta b, pues están en una recta paralela. Análogamente, los puntos C y C_1 se hallan en un mismo semiplano respecto a la recta b. Por consiguiente, los puntos A_1 y C_1 se encuentran en diferentes semiplanos respecto a esta recta de modo que el segmento A_1C_1 corta la recta b. Pero el único punto común de las rectas A_1C_1 y b es el punto B_1. Es decir, el punto B_1 se halla entre A_1 y C_1. Queda demostrada la primera afirmación.

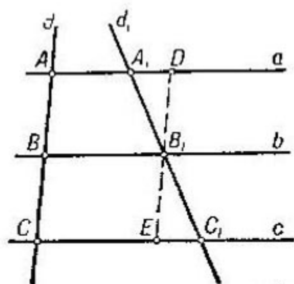


Fig. 63

Demostremos la segunda afirmación. Tracemos por el punto B_1 la recta paralela a la recta d. Corta las rectas a y c en los puntos D y E. Los triángulos B_1A_1D y B_1C_1E son iguales. En efecto, tienen $B_1D = B_1E$ porque $B_1D = AB$ y $B_1E = BC$. Los ángulos DA_1B_1 y EC_1B_1 son iguales y los ángulos A_1DB_1 y C_1EB_1 también son iguales, pues son alternos internos para las rectas paralelas a y c. De la igualdad de los triángulos se deduce que $A_1B_1 = B_1C_1$. Queda demostrado completamente el teorema.

PROBLEMA. *Divídase el segmento AB en n partes iguales.*

SOLUCIÓN. Tracemos por el punto A una semirrecta a cualquiera diferente de AB. Construyamos en la semirrecta a los segmentos iguales AA_1, A_1A_2, A_2A_3, . . ., $A_{n-1}A_n$. Tracemos por los puntos A_n y B la recta b. Las rectas que son paralelas a b y que pasan por los puntos A_1, A_2, ..., A_{n-1} cortan el segmento AB en los puntos B_1, B_2, ..., B_{n-1} que dividen el segmento AB en n segmentos iguales (teorema 9.8).

El *trapecio* es un cuadrilátero convexo que tiene paralelos sólo dos lados opuestos. Estos lados paralelos se llaman *bases* del trapecio. Los otros dos lados se denominan *laterales*. Un trapecio de laterales iguales se llama *isósceles*. El segmento que une los puntos medios de los laterales se denomina *base media* del trapecio.

TEOREMA 9.9. *La base media del trapecio es paralela a las bases y es igual a la semisuma de las mismas.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $ABCD$ el trapecio dado de bases AD y BC (fig. 64). Sea PQ la base media del trapecio. Tracemos por el punto P la recta paralela a las bases. Según el teorema 9.8, cortará el segmento CD en el punto medio. O sea, es precisamente la base media del trapecio que, por consiguiente, es paralela a las bases. Queda demostrada la primera afirmación del teorema.

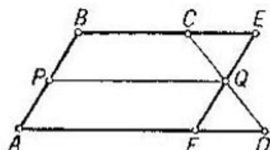


Fig. 64

Tracemos por el punto Q la recta EF paralela al lateral AB. Los puntos A y B se hallan a un mismo lado de la recta EF. Los puntos C y D están a diferentes lados de esta recta. Supongamos, para concretar, que el punto C se encuentra al mismo lado que los puntos A y B. Los puntos C y E están a un mismo lado de la recta AB. Por esto, B no se halla entre C y E. Es decir, C se halla entre B y E.

De la igualdad de los triángulos CEQ y DFQ se deduce que $CE = DF$. Por la propiedad del paralelogramo, se tiene $PQ = BE = BC + CE$ y $PQ = AF = AD - FD$. Sumando miembro por miembro las igualdades obtenidas, encontramos que $2PQ = AD + BC$. Queda demostrado el teorema.

Punto de intersección de las medianas del triángulo. Se llama *línea media* del triángulo el segmento que une los puntos medios de dos lados.

TEOREMA 9.10. *La línea media del triángulo ABC que une los puntos medios de los lados AB y AC es paralela al lado BC y es igual a la mitad de este lado* (fig. 65).

DEMOSTRACIÓN. Sea B_1C_1 la línea media del triángulo. Tracemos por el punto B_1 la recta paralela a BC. Según el teorema 9.8, cortará el segmento AC en el punto medio, o sea, contendrá la línea media B_1C_1. Queda demostrada la primera afirmación.

Tracemos por el punto C la recta paralela a AB. Cortará la recta B_1C_1 en un punto E. Los triángulos AC_1B_1 y CC_1E serán iguales. De la igualdad de estos triángulos

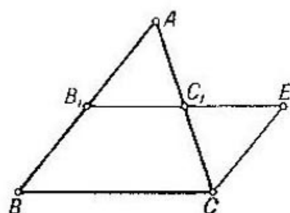


Fig. 65

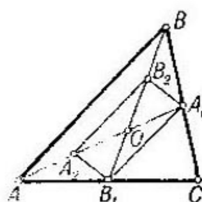


Fig. 66

resulta que $B_1C_1 = C_1E$ y que $BC = B_1E = B_1C_1 + C_1E = 2B_1C_1$, o sea, que B_1C_1 es igual a la mitad de BC. Queda demostrado el teorema.

TEOREMA 9.11. *Las tres medianas del triángulo se cortan en un punto. Este punto divide cada mediana en dos segmentos que están en razón 2 : 1 contando desde el vértice.*

DEMOSTRACIÓN. Sea ABC el triángulo dado (fig. 66). Tracemos sus medianas AA_1 y BB_1. Demostremos primero que las dos medianas AA_1 y BB_1 se cortan. Los puntos C y B_1 se hallan en un mismo semiplano respecto a la recta AA_1. Los puntos C y B están en distintos semiplanos. Por consiguiente, los puntos B y B_1 se encuentran en distintos semiplanos. O sea, la mediana BB_1 corta la recta AA_1. Análogamente deducimos que la mediana AA_1 corta la recta BB_1. Puesto que las rectas AA_1 y BB_1 se cortan en un punto único, éste pertenece a la mediana AA_1 y a la mediana BB_1, es decir, las medianas se cortan.

Tracemos la línea media A_1B_1 del triángulo ABC y la línea media A_2B_2 del triángulo AOB. Ambas son paralelas al lado AB e iguales a la mitad de este lado. De aquí resulta que el cuadrilátero $A_1B_1A_2B_2$ es un paralelogramo. Según la propiedad del paralelogramo, se tiene $B_1O = OB_2$; además $OB_2 = B_2B$ por construcción. Es decir, la mediana A_1A divide la mediana B_1B en dos segmentos que están en razón 2 : 1 contando desde el vértice B. La mediana trazada por el punto C divide la mediana BB_1 en la misma proporción. Por consiguiente, también pasa por el punto O. Queda demostrado el teorema.

Preguntas de repaso

1. ¿Qué cuadrilátero se llama convexo?
2. Demuéstrese que las diagonales del cuadrilátero convexo se cortan.
3. Demuéstrese que la suma de los ángulos del cuadrilátero convexo es igual a 360°.
4. ¿Qué es paralelogramo?
5. Demuéstrese que el paralelogramo es un cuadrilátero convexo.
6. Demuéstrese que los lados opuestos y los ángulos opuestos del paralelogramo son iguales.
7. Demuéstrese que la suma de dos ángulos no opuestos cualesquiera del paralelogramo es igual a 180°.
8. Demuéstrese que las diagonales del paralelogramo se cortan en el punto medio de ambas.
9. ¿Qué es rectángulo?
10. Demuéstrese que todo rectángulo es un paralelogramo y que las diagonales del rectángulo son iguales.
11. Demuéstrese que un paralelogramo con diagonales iguales es un rectángulo.
12. ¿Qué es rombo?
13. Demuéstrese que las diagonales del rombo se cortan en ángulo recto. Demuéstrese que las diagonales del rombo son bisectrices de los ángulos respectivos.
14. ¿Qué es cuadrado? Enúnciense las propiedades del cuadrado.
15. ¿Qué cuadrilátero se denomina trapecio?
16. Demuéstrese que la base media del trapecio es igual a la semisuma de sus bases.
17. Demuéstrese que la línea media del triángulo es igual a la mitad del lado correspondiente.
18. Demuéstrese que las tres medianas del triángulo se cortan en un punto.

Ejercicios

19. Demuéstrese que el cuadrilátero es convexo si sus diagonales se cortan.
20. ¿Pueden ser obtusos todos los ángulos del cuadrilátero convexo?
21. Demuéstrese que el cuadrilátero convexo es un paralelogramo si sus diagonales se cortan en el punto medio de ambas.
22. Demuéstrese que el cuadrilátero convexo es un paralelogramo si sus ángulos opuestos son iguales.
23. Demuéstrese que los puntos medios de los lados de un cuadrilátero convexo cualquiera son vértices de un paralelogramo.
24. Hállese el punto que dé la suma menor de distancias entre él y los vértices de un cuadrilátero convexo.
25. Demuéstrese que el cuadrilátero convexo es un rectángulo si todos sus ángulos son iguales.
26. En el paralelogramo se ha trazado la bisectriz de uno de sus ángulos. ¿En qué segmentos divide el lado mayor del paralelogramo, si sus lados miden 5 cm y 6 cm?

27. Hállense los ángulos del rombo si una de sus diagonales es igual a su lado.

28. Demuéstrese que el paralelogramo es un rombo si sus diagonales se cortan en ángulo recto.

29. Demuéstrese que los puntos de intersección de las bisectrices de los ángulos del paralelogramo son vértices de un cuadrado.

30. Demuéstrese que los puntos medios de los lados del rectángulo son vértices de un rombo y que los puntos medios de los lados del rombo son vértices de un rectángulo.

31. Demuéstrese que la recta que une los puntos medios de las diagonales del trapecio es paralela a las bases.

32. Un triángulo está en un semiplano respecto a una recta. Demuéstrese que la distancia entre esta recta y el punto de intersección de las medianas del triángulo es media aritmética de las distancias entre los vértices y esta recta.

33. Constrúyase el trapecio dados sus lados.

34. Demuéstrese que las tres rectas que pasan por los vértices del triángulo y son perpendiculares a los lados opuestos se cortan en un punto. (*Sugerencia*. Considérese el triángulo cuyos lados pasan por los vértices del triángulo y son paralelos a los lados opuestos).

§ 10. MOVIMIENTOS. IGUALDAD DE FIGURAS

Concepto del movimiento. Sean F y F_1 dos figuras. Diremos que entre los puntos de estas figuras se ha establecido una *correspondencia biunívoca* si los puntos de las figuras se han unido en pares (X, X_1) de modo que todo punto X de la figura F y todo punto X_1 de la figura F_1 pertenezca a un par y sólo a uno. Los puntos X y X_1 de las figuras se denominan *puntos correspondientes*. Por lo tanto, para todo punto X de la figura F existe un punto correspondiente determinado X_1 de la figura F_1 y viceversa.

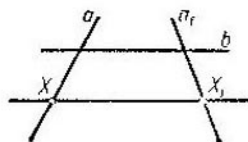


Fig. 67

En lugar de correspondencia biunívoca entre los puntos de las figuras F y F_1 podemos hablar de la *aplicación biunívoca* de la figura F sobre la figura F_1. Veamos un ejemplo.

Supongamos que la figura F es la recta a y que la figura F_1 es la recta a_1. Supongamos, además, que b es una recta que corta las rectas a y a_1 (fig. 67). Una recta cualquiera paralela a b corta la recta a en un punto X y la recta a_1 en un punto X_1. Unamos cada dos puntos de este tipo en un par (X, X_1). Esta unión de puntos en pares es una correspondencia biunívoca entre las rectas a y a_1.

Una aplicación biunívoca del plano sobre sí mismo se llama *movimiento* si conserva las distancias. Esto significa que siendo X e Y dos puntos cualesquiera y X_1 e Y_1 sus puntos correspondientes, se tiene $XY = X_1Y_1$.

Propiedades del movimiento. TEOREMA 10.1 *Si, por efecto de un movimiento, tres puntos A, B y C que se hallan en una recta se transforman en los puntos A_1, B_1 y C_1, éstos se hallarán en una recta. Si el punto B está entre A y C, el punto B_1 estará entre A_1 y C_1.*

DEMOSTRACIÓN. Si los puntos A_1, B_1 y C_1 no se hallan en una recta, son vértices de un triángulo. Por ello, se tiene $A_1C_1 < A_1B_1 + B_1C_1$. Por definición del movimiento, de aquí resulta que $AC < AB + BC$. Sin embargo, debido a la propiedad de la medición de los segmentos, se tiene $AC = AB + BC$. Hemos llegado a una contradicción. Queda demostrada la primera afirmación del teorema.

Probemos ahora que el punto B_1 está entre A_1 y C_1. Supongamos que A_1 se halla entre B_1 y C_1. Entonces será $A_1B_1 + A_1C_1 = B_1C_1$ y, por consiguiente, tendremos $AB + AC = BC$. Pero esto quedará en contradicción con la igualdad $AB + BC = AC$. O sea, el punto A_1 no puede estar entre B_1 y C_1. Análogamente se demuestra que el punto C_1 no puede hallarse entre A_1 y B_1. Puesto que uno de los tres puntos A_1, B_1 y C_1 se encuentra entre los otros dos, este punto puede ser únicamente B_1. Queda demostrado completamente el teorema.

Consideremos un movimiento, es decir, una aplicación biunívoca del plano sobre sí mismo que conserva las distancias. Sea F una figura cualquiera de este plano. Cuando el punto X recorre la figura F, el punto correspondiente X_1 recorre una figura F_1. Diremos que la figura F_1 se obtiene de la figura F mediante un movimiento. Diremos también que por efecto de este movimiento la figura F se transforma en F_1. Toda figura F_1 que se obtiene de la figura F mediante un movimiento se llama *igual* a F.

Del teorema 10.1 se deduce que *todo movimiento transforma las rectas en rectas, las semirrectas en semirrectas y los segmentos en segmentos.*

Sean AB y AC dos semirrectas que parten de un punto común A y que no se hallan en una misma recta. Por efecto del movimiento, estas semirrectas se transforman en unas semirrectas A_1B_1 y A_1C_1. Puesto que todo movimiento conserva las distancias, los triángulos ABC y $A_1B_1C_1$ son

iguales por el tercer criterio de la igualdad. La igualdad de los triángulos implica la igualdad de los ángulos BAC y $B_1A_1C_1$. Por consiguiente, *los movimientos no alteran los ángulos entre las semirrectas.*

Simetría respecto a la recta. Sean a una recta y X un punto cualquiera del plano (fig. 68). Tracemos por el punto X la recta b perpendicular a la recta a. Cortará la recta a en el punto A. Construyamos ahora el punto X_1 ateniéndonos a la regla siguiente. Si el punto X se halla en la recta a, el punto X_1 coincide con X. Si X no se halla en la recta a, el punto X_1 se encuentra en el otro semiplano respecto a la recta a, pertenece a la recta b y la distancia AX_1 es igual a la distancia AX. El punto X_1 se llama *simétrico* del punto X respecto a la recta a. El punto X es el simétrico del punto X_1 respecto a la recta a. La aplicación del plano sobre sí mismo, que a todo punto X le pone en correspondencia el punto X_1 simétrico respecto a la recta a, se llama *transformación de simetría o reflexión especular* respecto a la recta a.

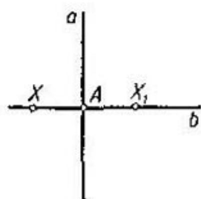


Fig. 68

TEOREMA 10.2. *La reflexión especular respecto a la recta es un movimiento.*

DEMOSTRACIÓN. Sean X e Y dos puntos cualesquiera y sean X_1 e Y_1 los puntos correspondientes suyos, simétricos de éstos respecto a la recta a. La afirmación del teorema consiste en que $X_1Y_1 = XY$. Consideremos el caso en que los puntos X e Y no se hallan en la recta a ni en una perdicular a la recta a (fig. 69).

Los triángulos rectángulos ABX y ABX_1 son iguales pues tienen el cateto común AB y los catetos XA y X_1A son iguales por definición de la simetría. De aquí resulta que $XB = X_1B$ y que $\angle XBA = \angle X_1BA$. Entonces, resultan iguales los triángulos XYB y X_1Y_1B. Tienen $XB = X_1B$, $YB = Y_1B$ y $\angle YBX = \angle Y_1BX_1$. La igualdad de estos triángulos implica que $X_1Y_1 = XY$.

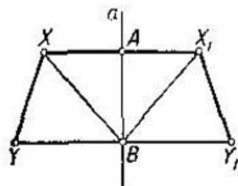


Fig. 69

La igualdad $X_1Y_1 = XY$ se obtiene también en los casos en que uno o ambos puntos se hallan en la recta a o en una perpendicular a la recta a. Recomendamos al lector que de-

muestre esto a título de ejercicio. Queda demostrado el teorema.

Si la reflexión especular respecto a la recta a transforma la figura F en sí misma, esta figura se denomina *simétrica* y la recta a se llama *eje de simetría* de la figura. La bisectriz

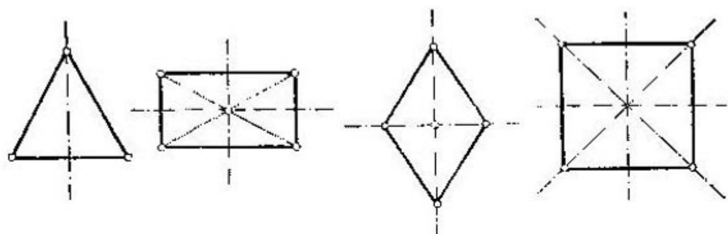


Fig. 70

del ángulo correspondiente al vértice del triángulo isósceles es su eje de simetría. Las diagonales del rombo son sus ejes de simetría. Las rectas que pasan por el punto de intersección de las diagonales del rectángulo paralelamente a sus lados, son ejes de simetría. Las diagonales del cuadrado y las rectas que pasan por el punto de intersección de las diagonales paralelamente a los lados, son ejes de simetría (fig. 70).

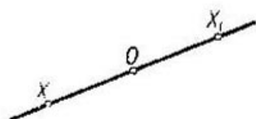


Fig. 71

Simetría respecto al punto. Sea O un punto del plano y sea X un punto cualquiera (fig. 71). Construyamos el punto X_1 ateniéndonos a la regla siguiente. Si el punto X coincide con O, el punto X_1 es el punto O. Si el punto X no coincide con O, el punto X_1 pertenece a la semirrecta complementaria de la semirrecta OX siendo la distancia OX_1 igual a OX. El punto X_1 obtenido de esta forma se llama *simétrico* respecto al punto O. La transformación del plano sobre sí mismo, que a todo punto X pone en correspondencia el punto X_1 según la regla señalada, se denomina *transformación de simetría* respecto al punto O.

TEOREMA 10.3. *Toda transformación de simetría respecto a un punto es un movimiento.*

DEMOSTRACIÓN. Sean X e Y dos puntos cualesquiera y sean X_1 e Y_1 los puntos que les corresponden en virtud

de la simetría respecto al punto O. El teorema afirma que $X_1Y_1 = XY$. Consideremos el caso en que los puntos X e Y no coinciden con el punto O y no se hallan en una misma recta que pasa por el punto O (fig. 72).

Los triángulos XOY y X_1OY_1 son iguales. Sus ángulos de vértice O son iguales, pues son verticales, y $X_1O = XO$ e $Y_1O = YO$ por definición de la simetría. De la igualdad de los triángulos resulta que $X_1Y_1 = XY$.

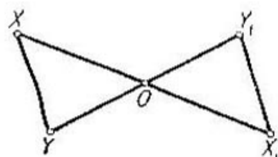


Fig. 72

El mismo resultado $X_1Y_1 = XY$ se obtiene para las demás posiciones de los puntos X e Y respecto al punto O. Recomendamos al lector que demuestre, a título de ejercicio, esto último. Queda demostrado el teorema.

Si la simetría respecto al punto O transforma la figura F en sí misma, se dice que la figura es *simétrica central*. El punto O se denomina *centro de simetría*. El paralelogramo es una figura simétrica central. Su centro de simetría es el punto de intersección de las diagonales.

Traslación paralela. Recibe el nombre de *traslación paralela* el movimiento en el que los puntos se desplazan a una misma distancia según rectas paralelas.

TEOREMA 10.4. *Cualesquiera que sean los puntos A_1 y A_2, existe una traslación paralela única que transforma el punto A_1 en A_2.*

DEMOSTRACIÓN (fig. 73). Tomemos un punto A que no se halla en la recta A_1A_2 e indiquemos por O_1 y O_2 los puntos medios de los segmentos A_1A y A_2A. Sea X un punto cualquiera del plano. Construyamos el punto X_1 simétrico de éste respecto al punto O_1 y después el punto X_2 simétrico de X_1 respecto al punto O_2. La transformación del plano que hace corresponder el punto X_2 al punto X es un movimiento ya que la simetría respecto al punto O_1 y la simetría respecto al punto O_2 conservan las distancias.

Puesto que el segmento O_1O_2 es la línea media del triángulo X_1X_2X, las rectas XX_2 y O_1O_2 son paralelas y el segmento XX_2 es igual al duplo del segmento O_1O_2. Por consiguiente, en virtud de este movimiento los puntos se desplazan según paralelas a la recta O_1O_2 a una distancia igual a $2(O_1O_2)$, es decir, ésta es una traslación paralela. Esta traslación paralela transforma el punto A_1 en el punto A_2.

Demostremos la unicidad de la traslación paralela (fig. 74). Sea X un punto cualquiera del plano. Tracemos por el punto X la recta paralela a la recta A_1A_2 y construyamos en ésta los segmentos XX_1 y XX_2 iguales al segmento A_1A_2. Los puntos X_1 y X_2 se diferencian en que están a distintos lados de la recta A_1X. Supongamos, para concretar, que el punto X_1 y el punto A_2 están a un mismo lado de la recta A_1X.

El punto X_2 no puede corresponder al punto X en una traslación paralela que transforme el punto A_1 en A_2. En efecto, la recta A_1X debe transformarse en la recta A_2X_2.

Fig. 73

Fig. 74

El punto B en el que se cortan el segmento A_2X_2 y la recta A_1X debe desplazarse por la recta paralela a A_1A_2. Por consiguiente, el punto B debe permanecer fijo. Pero esto es imposible ya que debe desplazarse a una distancia igual a A_1A_2. Es decir, en la traslación paralela considerada, al punto X puede corresponder sólo el punto X_1. Luego, el punto X_1 correspondiente al punto X se determina unívocamente y ello prueba la unicidad de la traslación paralela. Queda demostrado el teorema.

Rotación. Se llama *rotación* de ángulo φ respecto al punto O el movimiento en el que el punto O permanece fijo y todo rayo que parte del punto O gira en ángulo φ, o sea, forma ángulo φ con el rayo que le corresponde.

TEOREMA 10.5. *Si en el movimiento permanece fijo sólo un punto, este movimiento es una rotación.*

DEMOSTRACIÓN (fig. 75). Sea O el punto fijo. Tracemos desde él dos rayos a_1 y b_1. Se transformarán en el movimiento en los rayos a_2 y b_2. Los ángulos (a_1b_1) y (a_2b_2) serán iguales pues corresponderán en el movimiento. Tracemos la bisectriz

c_1 del ángulo (a_1b_1), la bisectriz c_2 del ángulo (a_2b_2) y la bisectriz del ángulo (c_1c_2). Complementemos la última hasta obtener una recta que llamaremos s.

Puesto que las bisectrices c_1 y c_2 son simétricas respecto a la recta s y que los ángulos (a_1b_1) y (a_2b_2) son iguales, éstos también son simétricos respecto a la recta s. Pueden darse dos casos de esta simetría: los rayos correspondientes son a_1 y a_2, b_1 y b_2 o los rayos correspondientes son a_1 y b_2, b_1 y a_2. Afirmamos que el primer caso es imposible.

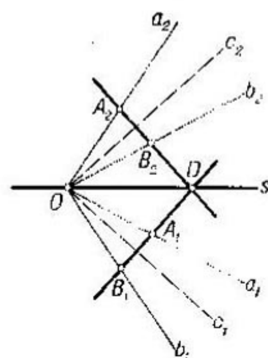


Fig. 75

Tracemos por un punto D, diferente de O, de la recta s una recta que corte los rayos a_1 y b_1. Sean A_1 y B_1 los puntos de intersección. La recta simétrica de ésta respecto a s corta los rayos a_2 y b_2 en unos puntos A_2 y B_2. En el primer caso de simetría respecto a la recta s, el punto A_1 se transforma en A_2; y el punto B_1 en B_2. Puesto que el punto O se transforma en sí mismo, se tiene $OA_1 = OA_2$ y $OB_1 = OB_2$. Por lo tanto, en el primer caso los puntos A_1 y A_2 y los puntos B_1 y B_2 son correspondientes en el movimiento de que trata el teorema.

Como quiera que todo movimiento conserva las distancias entre los puntos y el orden de posición de puntos en la recta, en el primer caso cualquier punto X de la recta A_1B_1 se transformará en un mismo punto, tanto en el movimiento considerado como en la simetría respecto a la recta s. En particular, el punto D permanecerá fijo. Pero esto es imposible ya que en el movimiento considerado permanece fijo sólo el punto O. Por consiguiente, el primer caso es imposible.

Queda el segundo caso. En éste, las rectas que corresponden en la simetría respecto a la recta s son las rectas a_1 y b_2 y las rectas b_1 y a_2. Los ángulos (a_1a_2) y (b_1b_2) corresponden en la simetría y, por consiguiente, son iguales. Queda demostrado el teorema.

De este teorema resulta que *dos reflexiones especulares, realizadas sucesivamente respecto a dos rectas secantes, equivalen a una rotación.*

En efecto, el movimiento, que se obtiene como resultado de las reflexiones especulares respecto a las dos rectas secantes, deja fijo sólo un punto, el punto de intersección de las rectas. Pero según el teorema 10.5, este movimiento es una rotación.

Preguntas de repaso

1. ¿Qué es movimiento? ¿Qué figuras se llaman iguales?
2. Demuéstrese el teorema 10.1: Si, por efecto de un movimiento, tres puntos A, B y C que se hallan en una recta se transforman en los puntos A_1, B_1 y C_1, éstos se hallarán en una recta. Si el punto B está entre A y C, el punto B_1 estará entre A_1 y C_1.
3. Demuéstrese que todo movimiento transforma rectas en rectas, rectas secantes en rectas secantes y rectas paralelas en rectas paralelas.
4. ¿Qué es simetría respecto a la recta?
5. Demuéstrese que toda simetría respecto a la recta es un movimiento.
6. Demuéstrese que las líneas punteadas de la fig. 70 son ejes de simetría de las figuras representadas en ella.
7. ¿Qué es simetría respecto al punto?
8. Demuéstrese que toda simetría respecto al punto es un movimiento.
9. Demuéstrese que el punto de intersección de las diagonales del paralelogramo es su centro de simetría.
10. ¿Qué es rotación?
11. ¿Qué es traslación paralela?

Ejercicios

12. Demuéstrese que si dos puntos A y B permanecen fijos en el movimiento, todos los puntos de la recta AB permanecen fijos.
13. Demuéstrese que si tres puntos no pertenecientes a una recta permanecen fijos, todos los puntos permanecen fijos.
14. Demuéstrese que para hacer coincidir dos cualesquiera segmentos iguales basta a lo sumo dos reflexiones especulares.
15. Demuéstrese que para hacer coincidir dos cualesquiera triángulos iguales basta a lo sumo tres reflexiones especulares.
16. Demuéstrese que para obtener cualquier movimiento basta a lo sumo tres reflexiones especulares.
17. Demuéstrese que si a y b son ejes de simetría de una figura, la recta simétrica de a respecto a la recta b es también eje de simetría.
18. Demuéstrese que es isósceles todo triángulo que tenga un eje de simetría.
19. Demuéstrese que el triángulo no puede tener centro de simetría.
20. Demuéstrese que si A y B son centros de simetría de una figura, el punto A_1 simétrico de A respecto a B es también centro de simetría. Por lo tanto, la figura tiene infinitos centros de simetría.
21. Demuéstrese que dos reflexiones especulares, realizadas sucesivamente respecto a dos rectas paralelas, equivalen a una traslación paralela.

22. Demuéstrese que dos simetrías, realizadas sucesivamente respecto a dos puntos A y B, equivalen a una traslación paralela.

23. Sea dada una recta y dos puntos A y B que no están en la misma. Hállese un punto C de la recta para el cual la suma de sus distancias hasta los puntos A y B sea mínima. Considérense dos casos: 1) los puntos A y B se encuentran en distintos semiplanos respecto a la recta y 2) los puntos A y B se hallan en un mismo semiplano respecto a la recta.

§ 11. CIRCUNFERENCIA

Propiedades elementales de la circunferencia. La *circunferencia* es el lugar geométrico de los puntos del plano equidistantes de un punto. Este último se llama *centro* de la circunferencia y la distancia entre el centro y los puntos de la circunferencia se denomina *radio* de la circunferencia. También se llama radio el segmento que une el centro de la circunferencia con cualquiera de sus puntos. El segmento que une dos puntos de la circunferencia se llama *cuerda*. Toda cuerda que pasa por el centro de la circunferencia se denomina *diámetro*.

TEOREMA 11.1. *Todo diámetro de la circunferencia es eje de simetría. El centro de la circunferencia es centro de simetría.*

DEMOSTRACIÓN. Sea a el diámetro de la circunferencia y sea X un punto cualquiera de la misma (fig. 76). Construyamos el punto X_1 simétrico del punto X respecto al diámetro a. Los triángulos rectángulos OAX y OAX_1 son iguales. Tienen el cateto OA común y los catetos AX y AX_1 son iguales por definición de la simetría. De la igualdad de los triángulos resulta que $OX_1 = OX$. Pero esto significa que el punto X_1 se halla en la circunferencia. O sea, la simetría respecto al diámetro transforma la circunferencia en sí misma, es decir, el diámetro es eje de simetría de la circunferencia.

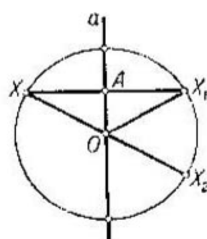


Fig. 76

Construyamos ahora el punto X_2 simétrico del punto X respecto al centro O de la circunferencia (fig. 76). Según la definición de la simetría respecto al punto, se tiene $OX_2 = OX$, o sea, el punto X_2 se halla en la circunferencia. Por consiguiente, el centro de la circunferencia es centro de la simetría.

Queda demostrado el teorema.

TEOREMA 11.2. *El diámetro perpendicular a la cuerda la divide por la mitad.*

DEMOSTRACIÓN. Sea AB la cuerda dada y sea C su punto medio (fig. 77). Tracemos el diámetro que pasa por el punto C. Los triángulos OCA y OCB son iguales por el tercer criterio de la igualdad de los triángulos. Tienen iguales los lados OA y OB que son radios, el lado OC es común y $AC = CB$ porque C es el punto medio del segmento AB. La igualdad de estos triángulos implica que sus ángulos de vértice C, iguales y adyacentes, son rectos. Por lo tanto, el diámetro OC es perpendicular a la cuerda AB y la divide por la mitad. No existe otro diámetro perpendicular a la cuerda AB ya que desde el punto O se puede trazar sólo una recta perpendicular a la recta AB. Queda demostrado el teorema.

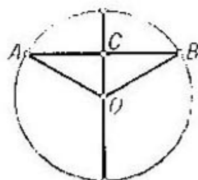


Fig. 77

TEOREMA 11.3. *Ninguna cuerda es mayor que el diámetro. Es igual al diámetro si ella misma es diámetro.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que la cuerda AB no es diámetro (fig. 77). Entonces, del triángulo AOB se tiene $AB < AO + OB$. Como AO y BO son radios, AB es menor que el diámetro. Queda demostrado el teorema.

La recta que pasa por un punto A de la circunferencia se llama *tangente* si es perpendicular al radio que va al punto A (fig. 78). El punto A se llama *punto de tangencia.*

TEOREMA 11.4. *Toda tangente tiene sólo un punto común con la circunferencia, el punto de tangencia.*

DEMOSTRACIÓN. Sea B otro punto cualquiera de la tangente diferente del punto de tangencia A (fig. 78). Por su propiedad respectiva de perpendicular y de oblicua $OB > OA$, o sea, la distancia entre el punto B y el centro es mayor que el radio. Por consiguiente, el punto B no pertenece a la circunferencia. Queda demostrado el teorema.

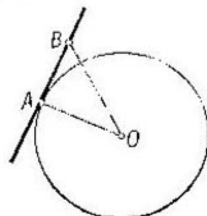


Fig. 78

Angulos centrales. Sean A y B dos puntos de la circunferencia (fig. 79). Tracemos la recta que pasa por estos puntos. Divide el plano en dos semiplanos. Llamaremos *arcos* de circunferencia a las partes de la misma que se hallan en estos semiplanos. Si AB

es un diámetro los árcos de circunferencia se denominan *semicircunferencias*.

Si la cuerda AB no es diámetro, diferenciaremos los arcos de circunferencia del modo siguiente. El centro de la circunferencia se encuentra en uno de los semiplanos en que la recta AB divide el plano. El arco que se halla en este mismo semiplano será llamado arco *mayor que la semicircunferencia*. El otro arco será llamado arco *menor que la semicircunferencia*. Los radios que van a los puntos del arco menor que la semicircunferencia cortan la cuerda AB y los radios que van a los puntos del arco mayor que la circunferencia no cortan la cuerda AB.

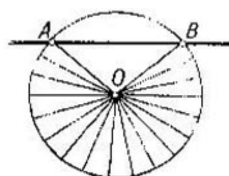


Fig. 79

Llamaremos *ángulo central* correspondiente al arco de circunferencia dado la figura formada por rayos que parten del centro de la circunferencia y que cortan este arco. En la fig. 79 puede verse los rayos de un ángulo central mayor que la semicircunferencia.

Definamos la *medida en grados* de los ángulos centrales. Si el arco correspondiente $\widehat{AB}$ es menor que la semicircunferencia, la medida del ángulo central es idéntica a la medida corriente del ángulo formado por las semirrectas OA

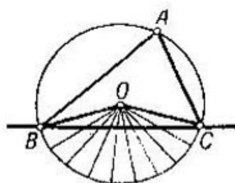


Fig. 80

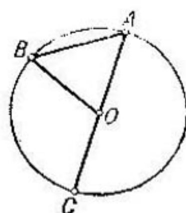


Fig. 81

y OB. Si el arco es igual a la semicircunferencia, o sea, si AB es diámetro, tomamos la medida angular igual a $180°$. Finalmente, si el arco es mayor que la semicircunferencia, tomamos la medida angular igual a $360° - \alpha°$, donde $\alpha°$ es la medida en grados del otro ángulo, o sea, del que es menor que la semicircunferencia.

Angulos inscritos. Un ángulo se denomina *inscrito* en la circunferencia, si su vértice A se halla en la circunferencia y sus lados cortan la circunferencia en unos puntos B y C distintos de A (fig. 80). La recta BC divide la circunferencia en dos arcos. El ángulo central, correspondiente a aquel arco que no contiene el punto A, se llama *ángulo central correspondiente* al ángulo inscrito dado. En la fig. 80 el ángulo central correspondiente al ángulo inscrito está marcado por los rayos que parten del punto O.

TEOREMA 11.5. *Todo ángulo inscrito en la circunferencia es mitad del ángulo central correspondiente.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos primero el caso en que uno de los lados del ángulo inscrito es un diámetro (fig. 81). En este caso el ángulo central correspondiente al ángulo inscrito A es igual al ángulo BOC. El triángulo AOB es

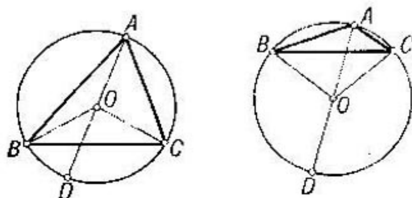


Fig. 82

isósceles de laterales OA y OB. Sus ángulos A y B son iguales. El ángulo exterior de vértice O de este triángulo es igual a la suma de los ángulos A y B. De aquí resulta que el ángulo BAC es mitad del ángulo central correspondiente.

Supongamos ahora que ninguno de los lados del ángulo inscrito es un diámetro. Tracemos el diámetro que pasa por el vértice A del ángulo inscrito. Diferenciaremos dos casos: 1) el diámetro OA separa los lados del ángulo A (fig. 82) y 2) el diámetro no separa los lados del ángulo A.

Consideremos el primer caso. Según hemos demostrado, $\angle BAD = \frac{1}{2}\angle BOD$ y $\angle CAD = \frac{1}{2}\angle COD$. Si el ángulo central correspondiente al ángulo A es menor que la semicircunferencia (fig. 82, a la izquierda), de aquí resulta que $\angle BAC = \frac{1}{2}\angle BOC$. Por consiguiente, el ángulo BAC es mitad del ángulo central correspondiente.

Si el ángulo central correspondiente al ángulo inscrito A es mayor que la semicircunferencia (fig. 82, a la derecha), se tiene $\angle BOD = 180^\circ - \angle AOB$ y $\angle COD = 180^\circ - \angle AOC$. De aquí deducimos que $\angle BAC = \frac{1}{2}(360^\circ - \angle BOC)$, o sea, que el ángulo BAC es mitad del ángulo central correspondiente.

Análogamente se analiza el segundo caso en que el diámetro AO no separa los lados del ángulo A. Queda demostrado el teorema.

Del teorema 11.5 resulta que *son iguales los ángulos inscritos cuyos lados pasan por unos puntos A y B de la circunferencia y cuyos vértices se hallan en uno de los arcos determinados por la recta AB* (fig. 83). *En particular, los ángulos que descansan en un diámetro son rectos.*

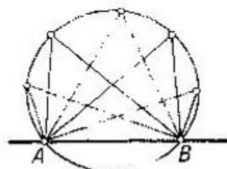


Fig. 83

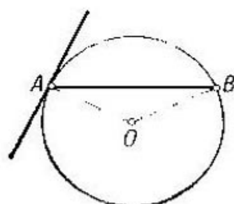


Fig. 84

Sea AB una cuerda de circunferencia (fig. 84). Tracemos por el punto A la tangente a la circunferencia. El punto A divide la tangente en dos semirrectas llamadas *semitangentes*. Se llaman *correspondientes* el ángulo entre la semitangente y la cuerda y el ángulo central que corresponde a aquel de los arcos $\widehat{AB}$ que se encuentra en el mismo semiplano respecto a la recta AB que la semitangente tomada.

TEOREMA 11.6. *El ángulo entre la cuerda y la semitangente trazada por un punto extremo de la primera es mitad del ángulo central correspondiente.*

DEMOSTRACIÓN. Tomemos primero aquel ángulo entre la semitangente y la cuerda que corresponda al ángulo central menor (fig. 84). En este caso, el ángulo entre la semitangente y la cuerda es igual a $90^\circ - \angle OAB$. Pero como el ángulo OAB es igual a $\frac{1}{2}(180^\circ - \angle AOB)$, resulta que el ángulo que nos interesa es igual a $\frac{1}{2}\angle AOB$, o sea, es mitad del

ángulo central correspondiente. El ángulo entre la cuerda y la otra semitangente es el adyacente de éste y, por ello, es igual a $180° - \frac{1}{2}\angle AOB$, o sea, precisamente a la mitad del ángulo central correspondiente. Queda demostrado el teorema.

Circunferencias inscrita y circunscrita. Diremos que el punto X se halla *dentro* del triángulo ABC (fig. 85) si está al mismo lado de la recta BC que el punto A, al mismo lado de la recta AC que el punto B y al mismo lado de la recta AB que el punto C. Se llama circunferencia *inscrita* en el triángulo la que tiene su centro dentro del triángulo y es tangente a sus lados.

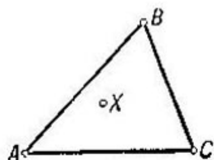


Fig. 85

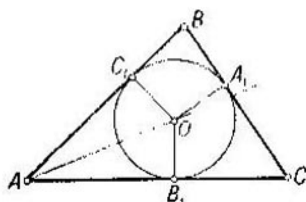


Fig. 86

Demostremos que *el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo se halla en el cruce de sus bisectrices* (fig. 86).

Sea O el centro de la circunferencia inscrita. Como quiera que el punto O está dentro del triángulo, la semirrecta AO se halla en el mismo semiplano respecto a la recta AC que la semirrecta AB y en el mismo semiplano respecto a la recta AB que la semirrecta AC. Por lo tanto, la semirrecta AO pasa entre las semirrectas AB y AC.

Sean C_1 y B_1 los puntos de tangencia de la circunferencia y de los lados AC y AB del triángulo. Los triángulos rectángulos AOC_1 y AOB_1 son iguales. Tienen la hipotenusa AO común y los catetos OC_1 y OB_1 iguales en tanto que radios. De aquí se deduce la igualdad de los ángulos OAC_1 y OAB_1. Pero esto significa que el centro de la circunferencia se halla en la bisectriz del triángulo trazada desde el vértice A. Análogamente demostraremos que el centro de la circunferencia está en las otras dos bisectrices del triángulo.

Queda demostrada la afirmación.

Demostremos ahora que *en todo triángulo se puede inscribir una circunferencia.*

Tracemos dos bisectrices del triángulo (fig. 87). Se cortan en un punto O. (La demostración de que las bisectrices se cortan es idéntica a la demostración de que las medianas se cortan.) Tracemos por el punto O las perpendiculares OA_1, OB_1 y OC_1 a las rectas AB, AC y BC. Los triángulos rectángulos AOB_1 y AOC_1 son iguales. Tienen la hipotenusa AO común y los ángulos OAB_1 y OAC_1 iguales pues AO es bisectriz. Por consiguiente, $OB_1 = OC_1$. Análogamente se demuestra que $OC_1 = OA_1$. La circunferencia de centro O

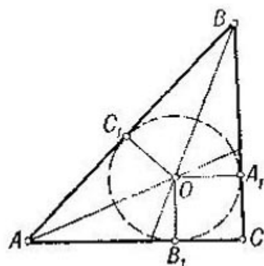


Fig. 87

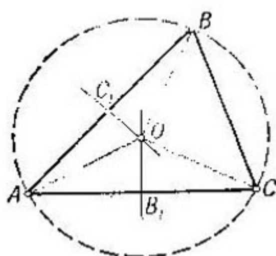


Fig. 88

y de radio OA_1 es tangente a los lados del triángulo en los puntos A_1, B_1 y C_1, o sea, es circunferencia inscrita. Queda demostrada la afirmación.

Se llama circunferencia *circunscrita* al triángulo la que pasa por cada uno de los vértices del triángulo.

Demostremos que *en torno a cualquier triángulo se puede circunscribir una circunferencia.*

DEMOSTRACIÓN. Sea ABC el triángulo dado (fig. 88). Tracemos por los puntos medios de los lados AB y AC del triángulo las rectas perpendiculares a éstos. Dichas rectas se cortarán en un punto O. Efectivamente, de lo contrario serían paralelas. Pero en este caso, las rectas AB y AC, en tanto que perpendiculares a dos paralelas, también resultarían paralelas, cosa imposible puesto que se cortan (en el punto A).

De la igualdad de los triángulos rectángulos AOB_1 y COB_1 se tiene $OA = OC$. De la igualdad de los triángulos rectángulos AOC_1 y BOC_1 resulta $OA = OB$. Por ello, la circunferencia de centro O y de radio OA pasa por los tres vértices del triángulo ABC, o sea, es circunferencia circunscrita. Queda demostrada la afirmación.

PROBLEMA. *Dada una circunferencia de centro O, constrúyanse las tangentes que pasan por un punto A exterior a la circunferencia.*

SOLUCIÓN (fig. 89). Construyamos la circunferencia que tiene el segmento OA como diámetro. Sean B y C los puntos de intersección de esta circunferencia y de la dada. Las rectas AB y AC son tangentes a la circunferencia dada, pues los ángulos OBA y OCA son rectos (teorema 11.5).

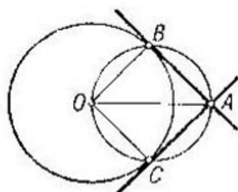


Fig. 89

Preguntas de repaso

1. ¿Qué es circunferencia y qué son centro, radio, cuerda y diámetro de la circunferencia?
2. Demuéstrese que el diámetro es eje de simetría de la circunferencia y que el centro es centro de simetría.
3. Demuéstrese que el diámetro perpendicular a la cuerda la divide por la mitad.
4. Demuéstrese que ninguna cuerda es mayor que el diámetro y que la cuerda es igual al diámetro sólo en el caso en que ella misma sea diámetro.
5. ¿Qué es arco de circunferencia? ¿Qué arco se denomina arco menor que la semicircunferencia? ¿Qué arco se denomina arco mayor que la semicircunferencia?
6. ¿Qué es ángulo central correspondiente a un arco de circunferencia?
7. ¿Cómo se determina la medida en grados del ángulo central?
8. ¿Qué es ángulo inscrito en la circunferencia? ¿Qué ángulo central se llama correspondiente al ángulo inscrito?
9. Demuéstrese el teorema: el ángulo inscrito en la circunferencia es igual a la mitad del ángulo central correspondiente.
10. Demuéstrese que el ángulo entre la cuerda y la semitangente en un punto extremo de la primera se mide por la mitad del ángulo central correspondiente.
11. ¿Qué significa la expresión: el punto se halla dentro del triángulo? ¿Qué circunferencia se denomina inscrita en el triángulo?
12. Demuéstrese que en todo triángulo se puede inscribir una circunferencia y que el centro de la circunferencia inscrita se halla en el cruce de las bisectrices.
13. ¿Qué circunferencia se denomina circunscrita al triángulo? Demuéstrese que cualquiera que sea el triángulo se le puede circunscribir una circunferencia, y sólo una.

Ejercicios

14. Demuéstrese que si la recta tiene un punto común con la circunferencia y no es tangente a la circunferencia en este punto, tiene un punto común más con la circunferencia.

15. Demuéstrese que la recta no puede cortar la circunferencia en tres puntos.

16. Trácese una circunferencia de radio dado tangente a los lados de un ángulo.

17. Hállese la circunferencia de radio dado tangente a dos circunferencias. ¿Cuál es el número máximo de soluciones de este problema?

18. Hállese el lugar geométrico de los pies de las perpendiculares trazadas desde el punto A a las rectas que pasan por el punto B.

19. Hállese el lugar geométrico de los vértices de los triángulos de base AB y de ángulo dado de vértice C.

20. Constrúyase el triángulo ABC a partir de su lado AB, su ángulo C y la altura relativa a la base AB.

21. Hállese el lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas que pasan por un mismo punto.

22. Sea ABC un triángulo. Constrúyanse las circunferencias tangentes a las tres rectas AB, AC y BC. ¿Cuántas son estas circunferencias?

23. Dos circunferencias se cortan en los puntos A y B. Por el punto B se traza una recta cortando las circunferencias en los puntos X e Y. Demuéstrese que el ángulo XAY no depende de la recta que se tome.

24. Se dice que el cuadrilátero convexo está inscrito en la circunferencia si sus vértices se hallan en la misma. Demuéstrese que la suma de los ángulos opuestos de un cuadrilátero inscrito es igual a 180°.

25. Demuéstrese que son iguales los segmentos AB y AC de dos tangentes trazadas a la circunferencia por un mismo punto (fig. 89).

26. El cuadrilátero convexo se denomina circunscrito a la circunferencia si sus lados son tangentes a la misma. Demuéstrese que en el cuadrilátero circunscrito las sumas de sus lados opuestos son las mismas. (*Sugerencia.* Empléese la propiedad de los segmentos de las tangentes a la circunferencia trazadas por un mismo punto. Véase el ejercicio 25.)

27. Demuéstrese que la distancia entre dos cualesquiera puntos interiores del triángulo no es mayor que el lado mayor del triángulo.

§ 12. SEMEJANZA DE LOS TRIÁNGULOS

Criterio principal de la semejanza de los triángulos. Dos triángulos ABC y $A_1B_1C_1$ se llaman *semejantes* si

$$\angle A = \angle A_1, \quad \angle B = \angle B_1, \quad \angle C = \angle C_1,$$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}.$$

En una palabra, los triángulos son semejantes si sus ángulos correspondientes son iguales y sus lados correspondientes son proporcionales. La semejanza de los triángulos se indica por el símbolo $\sim$. En nuestro caso, $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

TEOREMA 12.1. *Si en dos triángulos ABC y $A_1B_1C_1$ se tiene $\angle A = \angle A_1$ y $\angle B = \angle B_1$, los triángulos son semejantes.*

DEMOSTRACIÓN. Puesto que la suma de los ángulos del triángulo es igual a dos rectos, la igualdad de los ángulos A y A_1 y de los ángulos B y B_1 implica la igualdad de los ángulos C y C_1. Demostremos que los lados de los triángulos ABC y $A_1B_1C_1$ son proporcionales.

Supongamos, para puntualizar, que $AB \leqslant A_1B_1$. Tomemos en la semirrecta AB el segmento AB_2 igual al A_1B_1 (fig. 90, a la izquierda). Tracemos por el punto B_2 la recta

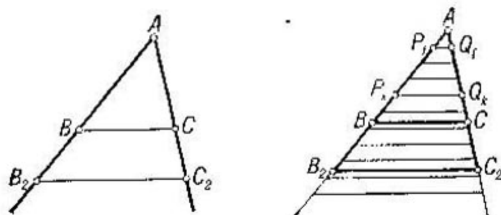


Fig. 90

paralela a BC. Corta la semirrecta AC en un punto C_2. Según la propiedad de los ángulos de las paralelas BC y B_2C_2 con la secante BB_2, los ángulos ABC y AB_2C_2 son iguales. El triángulo AB_2C_2 es igual al triángulo $A_1B_1C_1$ pues $\angle B_2AC_2 = \angle B_1A_1C_1$ por hipótesis del teorema siendo, además, $AB_2 = A_1B_1$ y $\angle AB_2C_2 = \angle A_1B_1C_1$ por construcción. De la igualdad de estos triángulos resulta que $AC_2 = A_1C_1$.

Tomemos un segmento pequeño AP_1 en la semirrecta AB de modo que las dos razones $\frac{AB}{AP_1}$ y $\frac{AB_2}{AP_1}$ no sean números enteros (fig. 90, a la derecha). Consideremos en la semirrecta AB los puntos $P_2, P_3, \ldots, P_k, \ldots$ de manera que $AP_k = k \cdot AP_1$. Sea n el entero de la división de AB por AP_1 y sea m el entero de la división de AB_2 por AP_1. El punto B está entonces entre los puntos P_n y P_{n+1} y el punto B_2 entre P_m y P_{m+1}. Por ello,

$$n \cdot AP_1 < AB < (n+1) \cdot AP_1,$$
$$m \cdot AP_1 < AB_2 < (m+1) \cdot AP_1.$$

De aquí resulta que

$$\frac{n}{m+1} < \frac{AB}{AB_2} < \frac{n+1}{m} . \quad (1)$$

Tracemos por los puntos P_1, P_2, P_3, . . . las rectas paralelas a BC. Estas rectas, según el teorema 9.8, cortan la semirrecta AC en unos puntos Q_1, Q_2, Q_3, . . . siendo los segmentos AQ_1, Q_1Q_2, Q_2Q_3, . . . iguales. El punto C se halla entre los puntos Q_n y Q_{n+1} y el punto C_2 entre los puntos Q_m y Q_{m+1}. Por lo tanto,

$$n \cdot AQ_1 < AC < (n+1) \cdot AQ_1,$$
$$m \cdot AQ_1 < AC_2 < (m+1) \cdot AQ_1.$$

De aquí que

$$\frac{n}{m+1} < \frac{AC}{AC_2} < \frac{n+1}{m} . \quad (2)$$

Las desigualdades (1) y (2) permiten ver que las razones $\frac{AB}{AB_2}$ y $\frac{AC}{AC_2}$ difieren no más que en $\frac{n+1}{m} - \frac{n}{m+1}$. Puesto que $AB \leqslant A_1B_1$, resulta que $n \leqslant m$. Por eso,

$$\frac{n+1}{m} - \frac{n}{m+1} = \frac{m+n+1}{m(m+1)} \leqslant \frac{2m+2}{m(m+1)} = \frac{2}{m} ,$$

o sea, las razones $\frac{AB}{AB_2}$ y $\frac{AC}{AC_2}$ difieren no más que en $\frac{2}{m}$.

Si tomamos el segmento AP_1 suficientemente pequeño, el número m será tan grande como se quiera y $\frac{2}{m}$ será tan pequeño como se quiera. Es decir, las razones $\frac{AB}{AB_2}$ y $\frac{AC}{AC_2}$ difieren *todo lo poco que se quiera*. Pero esto puede darse sólo si son iguales. O sea,

$$\frac{AB}{AB_2} = \frac{AC}{AC_2} .$$

Puesto que $AB_2 = A_1B_1$ y $AC_2 = A_1C_1$, se tiene

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} .$$

Análogamente se demuestra que

$$\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1} .$$

Queda demostrado el teorema.

Otros criterios de la semejanza de los triángulos. TEOREMA 12.2. *Si en los triángulos ABC y $A_1B_1C_1$ se tiene $\angle A = \angle A_1$ y*

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}, \qquad (3)$$

los triángulos son semejantes.

DEMOSTRACIÓN. Consideremos el triángulo $A_2B_2C_2$ que tenga $A_2B_2 = A_1B_1$, $\angle A_2 = \angle A$ y $\angle B_2 = \angle B$. Los triángulos ABC y $A_2B_2C_2$ son semejantes, según el teorema 12.1. Por consiguiente,

$$\frac{AB}{A_2B_2} = \frac{AC}{A_2C_2}. \qquad (4)$$

Puesto que $A_2B_2 = A_1B_1$, de las igualdades (3) y (4) resulta que $A_2C_2 = A_1C_1$.

Ahora podemos afirmar que los triángulos $A_1B_1C_1$ y $A_2B_2C_2$ son iguales. Tienen $A_1B_1 = A_2B_2$ por construcción, $A_1C_1 = A_2C_2$ según hemos demostrado y $\angle A_1 = \angle A_2$ debido a la igualdad de los ángulos A y A_1 y a la semejanza de los triángulos ABC y $A_2B_2C_2$.

Ya que los triángulos ABC y $A_2B_2C_2$ son semejantes y que los triángulos $A_2B_2C_2$ y $A_1B_1C_1$ son iguales, los triángulos ABC y $A_1B_1C_1$ son semejantes. Queda demostrado el teorema.

TEOREMA 12.3. *Si en los triángulos ABC y $A_1B_1C_1$ se tiene*

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1},$$

los triángulos son semejantes.

DEMOSTRACIÓN. Construyamos el triángulo $A_2B_2C_2$ que tenga $A_2B_2 = A_1B_1$, $A_2C_2 = A_1C_1$ y $\angle A_2 = \angle A$. Según el teorema 12.2, los triángulos ABC y $A_2B_2C_2$ son semejantes. Por consiguiente,

$$\frac{AC}{A_2C_2} = \frac{BC}{B_2C_2}. \qquad (6)$$

Como quiera que $A_2C_2 = A_1C_1$, de las igualdades (5) y (6) resulta que $B_2C_2 = B_1C_1$. Ahora deducimos la igualdad de los triángulos $A_2B_2C_2$ y $A_1B_1C_1$ empleando el tercer criterio de la igualdad. Puesto que el triángulo ABC es semejante al triángulo $A_2B_2C_2$ y que el triángulo $A_2B_2C_2$ es igual al triángulo $A_1B_1C_1$, los triángulos ABC y $A_1B_1C_1$ son semejantes. Queda demostrado el teorema.

Segmentos proporcionales en el triángulo. TEOREMA 12.4. *En todo triángulo rectángulo la altura trazada desde el vértice del ángulo recto es media proporcional entre las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa. Cada uno de los catetos es media proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre la hipotenusa.*

DEMOSTRACIÓN. Sea ABC el triángulo rectángulo de ángulo recto C (fig. 91) y sea CD la altura trazada desde el vértice C. Los ángulos CAD y BCD son iguales porque cada

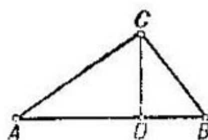


Fig. 91

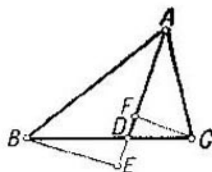


Fig. 92

uno de ellos complementa el ángulo ABC hasta 90°. Los triángulos rectángulos CAD y BCD son semejantes, según el teorema 12.1. De la semejanza de los triángulos se deduce que

$$\frac{CD}{BD}=\frac{AD}{CD}.$$

De aquí $(CD)^2 = AD\cdot BD$, o sea, $CD=\sqrt{AD\cdot BD}$. Queda demostrada la primera afirmación del teorema.

De la semejanza de los triángulos BCD y BAC se deduce que

$$\frac{AB}{CB}=\frac{CB}{BD},$$

de donde $(CB)^2 = AB\cdot BD$, o sea, $CB=\sqrt{AB\cdot BD}$. Queda demostrada la segunda afirmación del teorema.

TEOREMA 12.5. *La bisectriz AD del triángulo ABC divide el lado BC en segmentos proporcionales a los lados AB y AC, o sea,*

$$\frac{AB}{BD}=\frac{AC}{CD}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea ABC el triángulo dado (fig. 92) y sea AD la bisectriz relativa al lado BC. Tracemos las perpendiculares BE y CF a la recta AD. Los triángulos

BED y *CFD* son semejantes. Sus ángulos *E* y *F* son rectos y sus ángulos de vértice *D* son iguales por ser verticales.

Los triángulos *BAE* y *CAF* también son semejantes. Sus ángulos *E* y *F* son rectos y sus ángulos de vértice *A* son iguales porque *AD* es bisectriz.

De la semejanza de los triángulos *BED* y *CFD* resulta la proporción

$$\frac{BE}{CF}=\frac{BD}{CD}.$$

De la semejanza de los triángulos *BAE* y *CAF* resulta la proporción

$$\frac{BE}{CF}=\frac{AB}{AC}.$$

Comparando las proporciones obtenidas, encontramos

$$\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}.$$

Queda demostrado el teorema.

Proporcionalidad de los segmentos de cuerdas y secantes. TEOREMA 12.6. *Los productos de los segmentos de cuerdas secantes coinciden. A saber, si las cuerdas AB y CD se cortan en el punto S, se tiene*

$$AS \cdot BS = CS \cdot DS.$$

DEMOSTRACIÓN (fig. 93). Tracemos la recta *BD*. Los puntos *A* y *C* se hallan en un mismo semiplano respecto a la recta *BD*; a saber, en el semiplano donde está el punto *S*. Por ello, ambos puntos *A* y *C* pertenecen a uno de los dos arcos en los que la recta *BD* divide la circunferencia. Pero esto significa que los ángulos inscritos *DCB* y *DAB* son iguales. Análogamente deducimos la igualdad de los ángulos *ABC* y *ADC*. Los triángulos *ASD* y *CSB* son entonces semejantes por el teorema 12.1. De la semejanza de estos triángulos resulta la proporción

$$\frac{DS}{BS}=\frac{AS}{CS},$$

es decir,

$$AS \cdot BS = CS \cdot DS.$$

Queda demostrado el teorema.

TEOREMA 12.7. *El producto de los segmentos de la secante es igual al cuadrado de la tangente. O sea, si por un punto S*

se trazan una secante de la circunferencia y una tangente, siendo A y B los puntos de intersección de la circunferencia con la secante y C el punto de tangencia con la tangente, se tiene

$$AS \cdot BS = (CS)^2.$$

DEMOSTRACION (fig. 94). Puesto que la circunferencia se halla a un lado de la tangente, el punto S no separa los puntos A y B. Supongamos, para concretar, que el punto B está entre A y S como aparece en la figura.

Los triángulos SAC y SCB son semejantes. Tienen el ángulo S común y los ángulos CAB y BCS iguales, pues

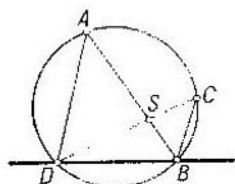


Fig. 93

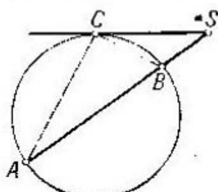


Fig. 94

se miden por la mitad de un mismo ángulo central. De la semejanza de los triángulos resulta la proporción

$$\frac{CS}{AS} = \frac{SB}{CS},$$

de donde $AS \cdot BS = (CS)^2$. Queda demostrado el teorema.

Del teorema 12.7 se deduce que *son iguales los productos de los segmentos de las secantes trazadas por un mismo punto.*

Intersección de la recta con la circunferencia. TEOREMA 12.7. *Sean dadas una circunferencia de radio R y de centro O y una recta a que pasa a una distancia h del centro de la circunferencia. Entonces, la recta no corta la circunferencia si $h > R$, es tangente a la circunferencia si $h = R$ y corta la circunferencia en dos puntos si $h < R$.*

DEMOSTRACIÓN. Si $h > R$, la distancia de todo punto de la recta hasta el centro de la circunferencia es superior a R. Por consiguiente, estos puntos no pueden pertenecer a la circunferencia, o sea, la recta y la circunferencia no se cortan.

Si $h = R$, el pie de la perpendicular trazada a la recta desde el centro de la circunferencia se halla en la circunferencia. En este punto la recta es tangente a la circunferencia por definición misma de la tangente.

Consideremos el caso $h < R$ (fig. 95). Tracemos la recta OA perpendicular a la recta a. Construyamos en la recta a, a partir del punto A, los segmentos AD_1 y AD_2 iguales a $\sqrt{R^2 - h^2}$. En este caso, $OD_1 = OD_2$. Tracemos la circunferencia de centro O y de radio $OD_1 = OD_2$. Esta circunferencia corta la recta a en los puntos D_1 y D_2.

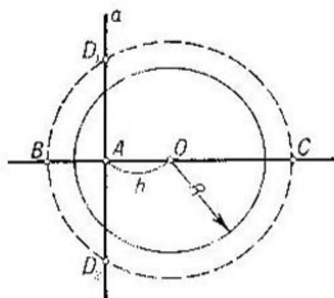


Fig. 95

Calculemos el radio de la circunferencia construida. Indiquémoslo por x. Según el teorema 12.6, tenemos $AB \cdot AC = AD_1 \cdot AD_2 = R^2 - h^2$. Puesto que $OA = h$, se tiene $AB = x - h$ y $AC = x + h$. Por esto,

$$(x - h)(x + h) = x^2 - h^2 = R^2 - h^2,$$

o sea,

$$x = R.$$

Por consiguiente, la circunferencia construida coincide con la dada, es decir, la circunferencia dada corta la recta a en dos puntos D_1 y D_2.

La recta a no puede tener otros puntos de intersección con la circunferencia que no sean D_1 y D_2. En efecto, si existiese un punto tal, indiquémoslo por P_1, el punto P_2 simétrico suyo respecto al diámetro BC también estaría en la circunferencia. Según el teorema 12.6, tendríamos $AP_1 \cdot AP_2 = AD_1 \cdot AD_2$. Puesto que $AD_1 = AD_2$ y $AP_1 = AP_2$, resultaría $AP_1 = AD_1$. Pero esto significaría que el punto P_1 coincide con D_1 o con D_2. Queda demostrado el teorema.

Dos problemas de construcción. PROBLEMA. *Dados tres segmentos a, b y c constrúyase el segmento*

$$x = \frac{bc}{a}.$$

SOLUCIÓN. Tracemos por un punto cualquiera O dos semirrectas p y q no pertenecientes a una misma recta (fig. 96). Tomemos en la semirrecta p los segmentos $OA = a$ y $OB = b$ y en la semirrecta q el segmento $OC = c$. Unamos con una recta los puntos A y C y tracemos por el punto B la recta paralela a la recta AC. Corta la semirrecta q en

un punto D. De la semejanza de los triángulos OAC y OBD resulta que

$$\frac{OD}{OC}=\frac{OB}{OA}.$$

De aquí

$$OD=\frac{OB\cdot OC}{OA}=\frac{bc}{a}.$$

PROBLEMA. *Dados dos segmentos a y b constrúyase el segmento*

$$x=\sqrt{ab}.$$

SOLUCIÓN. Tomemos en una recta cualquiera p un punto C y, partiendo de él, construyamos los segmentos $CA = a$ y $CB = b$ en direcciones opuestas de la recta p (fig. 97).

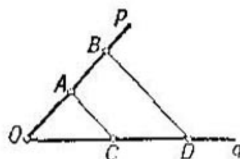


Fig. 96

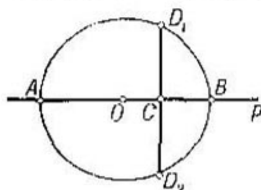


Fig. 97

Construyamos una circunferencia considerando el segmento AB como diámetro. La perpendicular al segmento AB que pasa por el punto C corta la circunferencia en dos puntos D_1 y D_2. El segmento CD_1 es igual a $\sqrt{ab}$, pues $CD_1 = CD_2$ y $CD_1 \cdot CD_2 = AC \cdot BC = ab$.

Semejanza de las figuras. Homotecia. Se llama *transformación de semejanza* toda aplicación biunívoca del plano sobre sí mismo en la que, cualesquiera que sean los puntos X e Y y sus puntos correspondientes X_1 e Y_1, la razón $\frac{XY}{X_1Y_1}$ permanece constante, o sea, no depende de los puntos escogidos X y Y. Esta razón se denomina *coeficiente de semejanza*.

Sea F una figura cualquiera. Cuando el punto X describe la figura F, el punto correspondiente X_1 describe una figura F_1. Las figuras F y F_1 se llaman *semejantes*.

Sea O un punto cualquiera del plano. Pongamos en correspondencia a todo punto X del plano el punto X_1 de acuerdo con la regla siguiente: si el punto X coincide con O,

el punto X_1 es el punto O; si X es diferente de O, el punto X_1 se halla en la semirrecta OX a una distancia $k \cdot OX$ del punto O, es decir, $OX_1 = k \cdot OX$. La aplicación del plano sobre sí mismo que hace corresponder de esta forma el punto X_1 al punto X se llama *homotecia*. El punto O se denomina *centro de homotecia* y el número k, *coeficiente de homotecia*.

TEOREMA 12.9. *La homotecia es una transformación de semejanza.*

DEMOSTRACION. Sean X y Y dos puntos cualesquiera del plano que no se hallan en una recta con el punto O (fig. 98). Los triángulos OXY y OX_1Y_1 son semejantes ya que tienen el ángulo O común y

$$\frac{OX_1}{OX} = \frac{OY_1}{OY} = k.$$

La semejanza de los triángulos implica que la razón $\frac{X_1Y_1}{XY}$ es igual a k, o sea, que no depende de los puntos escogidos X e Y. Al mismo resultado llegamos en el caso en que los puntos O, X e Y se hallan sobre una recta. Proponemos al lector demostrar ésto. Queda demostrado el teorema.

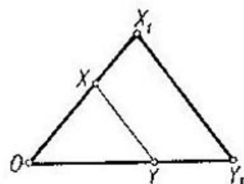


Fig. 98

Igual que en el § 10 para los movimientos, se obtienen las propiedades siguientes de las transformaciones de semejanza.

1. *Toda transformación de semejanza aplica rectas en rectas, semirrectas en semirrectas y segmentos en segmentos.*

2. *Toda transformación de semejanza conserva los ángulos entre semirrectas.*

Preguntas de repaso

1. ¿Qué son triángulos semejantes?

2. ¿En qué consiste el criterio principal de la semejanza de los triángulos? Demuéstrese este criterio.

3. Demuéstrese que los triángulos ABC y $A_1B_1C_1$ son semejantes si $\angle A = \angle A_1$ y

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}.$$

4. Demuéstrese que dos triángulos son semejantes si los lados de un triángulo son proporcionales a los lados del otro.

5. Enúnciese y demuéstrese el teorema sobre los segmentos proporcionales en el triángulo rectángulo.

6. Demuéstrese el teorema: el pie de la bisectriz divide el lado del triángulo en segmentos proporcionales a los otros lados.

7. Enúnciese y demuéstrese el teorema sobre el producto de los segmentos de cuerdas secantes.

8. Demuéstrese que el producto de los segmentos de la secante es igual al cuadrado de la tangente.

9. Sea dada una circunferencia de radio R y de centro O y sea S un punto cuya distancia hasta el centro O es menor que R. Demuéstrese que toda recta que pasa por el punto S corta la circunferencia en dos puntos.

10. ¿Qué es transformación de semejanza? ¿Qué figuras se denominan semejantes? Demuéstrese que la figura semejante a una circunferencia es una circunferencia.

11. ¿Qué es homotecia? ¿Qué son centro y coeficiente de homotecia?

12. Demuéstrese que toda homotecia es una transformación de semejanza.

Ejercicios

13. ¿Cuánto valen los ángulos del triángulo ABC que es semejante al triángulo BCA?

14. Demuéstrese que son semejantes dos triángulos isósceles que tienen iguales los ángulos del vértice.

15. El ángulo del vértice del triángulo isósceles es igual a 36°. Demuéstrese que la bisectriz que pasa por uno de los vértices de la base forma un triángulo semejante al dado.

16. El pie de la bisectriz trazada desde el vértice del ángulo recto del triángulo rectángulo divide la hipotenusa en razón $m : n$. Demuéstrese que el pie de la altura trazada desde el mismo vértice divide la hipotenusa en razón $m^2 : n^2$.

17. La bisectriz del ángulo exterior de vértice C del triángulo ABC corta la recta AB en un punto D. Demuéstrese que

$$\frac{AD}{BD}=\frac{AC}{BC}.$$

18. Demuéstrese que es una circunferencia el lugar geométrico de los puntos C para los cuales la razón de sus distancias a dos puntos fijos A y B es constante y diferente de la unidad. (*Sugerencia*. Las bisectrices de los ángulos interior y exterior de vértice C del triángulo ABC son perpendiculares. Cortan la recta AB siempre en los mismos puntos como quiera que se tome el punto C.)

19. Constrúyase el segmento

$$x=\frac{abc}{de},$$

donde a, b, c, d y e son segmentos dados.

20. Constrúyase el segmento $\sqrt{a^2 - b^2}$, donde a y b son segmentos dados, siendo $a > b$.

21. Demuéstrese geométricamente la desigualdad

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}.$$

22. El punto de intersección de las diagonales del cuadrilátero convexo las divide en segmentos de productos iguales. Demuéstrese que el cuadrilátero puede ser inscrito en una circunferencia.

23. Hállese el lugar geométrico de los puntos para los cuales es constante la razón de sus distancias a dos rectas secantes dadas.

24. Constrúyase el triángulo de perímetro determinado que sea semejante al triángulo dado.

25. Dados los segmentos

$$a = \frac{x+y}{2} \quad \text{y} \quad b = \sqrt{xy}$$

y siendo $a > b$, constrúyanse los segmentos x e y.

26. Inscríbase un cuadrado en el triángulo ABC de modo que un lado del cuadrado se halle en el lado AB y los demás vértices del cuadrado estén en los lados AC y BC.

27. Constrúyase la circunferencia que pase por un punto y que sea tangente a dos rectas secantes.

§ 13. TEOREMA DE PITÁGORAS Y SUS APLICACIONES

Teorema de Pitágoras. TEOREMA 13.1. *En el triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*

DEMOSTRACION. Sea ABC el triángulo rectángulo de vértice recto C (fig. 99). Tracemos desde el vértice C la altura CD. Demostremos, ante todo, que el pie D de la altura se halla entre los puntos A y B.

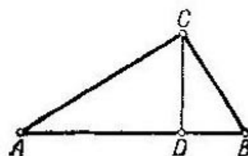


Fig. 99

Efectivamente, supongamos que el punto B se halla entre A y D. Los ángulos ABC y DBC son entonces adyacentes y agudos. Pero esto es imposible. Análogamente deducimos que tampoco el punto A puede hallarse entre B y D. Por consiguiente, el punto D está entre A y B.

Según el teorema 12.4, tenemos ahora

$$AC^2 = AD \cdot AB \quad \text{y} \quad BC^2 = BD \cdot AB.$$

Sumando estas igualdades miembro por miembro, encontramos

$$AC^2 + BC^2 = AB\,(AD + DB).$$

Puesto que el punto D se halla entre A y B, tenemos $AD + DB = AB$. Por esto,

$$AC^2 + BC^2 = AB^2.$$

Queda demostrado el teorema.

El teorema 13.1 lleva el nombre del famoso matemático griego Pitágoras (VI siglo antes de nuestra era).

Relaciones en el triángulo oblicuángulo. Todo triángulo que no sea rectángulo se llama *oblicuángulo*.

TEOREMA 13.2. *En todo triángulo oblicuángulo el cuadrado del lado opuesto al ángulo obtuso es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, más el duplo del producto de uno de estos lados por la proyección del otro.*

DEMOSTRACION. Sea ABC un triángulo de vértice obtuso C (fig. 100). Tracemos desde el vértice A la altura AD. Demostremos primero que el punto C se halla entre

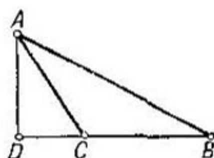


Fig. 100

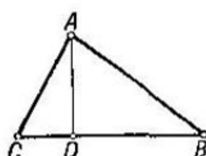


Fig. 101

B y D. Efectivamente, si el punto C no separa los puntos B y D, el ángulo C del triángulo rectángulo ADC es obtuso. Pero esto es imposible. O sea, el punto C separa los puntos B y D, esto es, se halla entre ellos.

Aplicando el teorema de Pitágoras a los triángulos rectángulos ADB y ADC, obtenemos

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 \quad \text{y}$$
$$AC^2 = AD^2 + DC^2.$$

Restando estas igualdades miembro por miembro, tendremos

$$AB^2 - AC^2 = BD^2 - DC^2.$$

Puesto que el punto C se halla entre B y D, se tiene $BD = BC + DC$. Tomando en la igualdad obtenida $(BC +$

$+ DC)^2$ en lugar de BD^2 y simplificando, encontramos

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2 \cdot BC \cdot CD.$$

Queda demostrado el teorema.

TEOREMA 13.3. *En todo triángulo oblicuángulo el cuadrado del lado opuesto a un ángulo agudo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el duplo del producto de uno de estos lados por la proyección del otro.*

DEMOSTRACION. Sea ABC un triángulo de ángulo agudo C (fig. 101). Tracemos desde el vértice A la altura AD. Notemos, ante todo, que el punto C no separa los puntos B y D. Efectivamente, en el caso contrario sería agudo el ángulo exterior de vértice C en el triángulo rectángulo ADC de ángulo recto D. Pero esto es imposible. Es decir, el punto D se halla entre C y B o el punto B se halla entre C y D. Supongamos, para concretar, que el punto D se halla entre C y B como aparece en la figura.

Aplicando el teorema de Pitágoras a los triángulos ADC y ADB, obtenemos

$$AB^2 = BD^2 + AD^2 \quad \text{y}$$
$$AC^2 = CD^2 + AD^2.$$

Restando estas igualdades miembro por miembro, tendremos

$$AB^2 - AC^2 = BD^2 - CD^2.$$

Puesto que el punto D se halla entre B y C, se tiene $BC = BD + CD$, o sea, $BD = BC - CD$. Tomando en la igualdad obtenida $(BC - CD)^2$ en lugar de BD^2, encontramos

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot BC \cdot AD.$$

Si el punto B se halla entre C y D, la demostración es análoga. Queda demostrado el teorema.

Relación entre las diagonales y los lados del paralelogramo. TEOREMA 13.4. *En todo pareletogramo la suma de los cuadrados de las diagonales es igual a la suma de los cuadrados de los lados.*

DEMOSTRACION. Sea $ABCD$ un paralelogramo y sean AC y BD sus diagonales. Si el paralelogramo es un rectángulo (fig. 102, a la izquierda), tenemos por el teorema de Pitágoras

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 \quad \text{y}$$
$$BD^2 = BC^2 + DC^2.$$

Sumando estás igualdades miembro por miembro y observando que $DC = AB$, obtenemos

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2.$$

Supongamos ahora que el paralelogramo no es un rectángulo (fig. 102, a la derecha). Tracemos desde los vértices

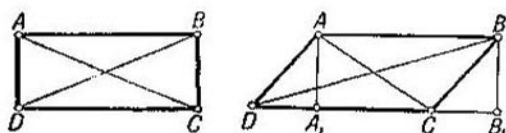


Fig. 102

A y B las perpendiculares AA_1 y BB_1 a la recta CD. De la igualdad de los triángulos ADA_1 y BCB_1 resulta $DA_1 = CB_1$.

Los ángulos ADC y BCD se complementan hasta 180°, pues son correspondientes internos para las paralelas AD y BC. Por ello, si uno de estos ángulos es agudo, el otro es obtuso. Supongamos, para concretar, que el ángulo ADC es agudo y que el ángulo BCD es obtuso como representa la figura.

Aplicando el teorema 13.2 al triángulo BCD y el teorema 13.3 al triángulo ADC, obtenemos

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 + 2 \cdot DC \cdot CB_1 \quad \text{y}$$
$$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2 \cdot DC \cdot DA_1.$$

Sumando miembro por miembro estas igualdades y observando que $CB_1 = DA_1$ y que $AB = CD$, obtenemos

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2.$$

Queda demostrado el teorema.

Del teorema 13.4 resulta que *la diagonal del cuadrado es igual a su lado multiplicado por* $\sqrt{2}$. Efectivamente, si a es el lado del cuadrado y b su diagonal, según el teorema 13.4, tenemos $2 \cdot b^2 = 4 \cdot a^2$. De aquí resulta que $b = a\sqrt{2}$.

Existencia del triángulo de lados dados. Como sabemos la suma de dos lados del triángulo es mayor que su tercer lado. Surge la pregunta natural: ¿pueden ser lados de un triángulo tres números arbitrarios si la suma de dos cualesquie-

ra de estos números es mayor que el tercero? El teorema que sigue da una respuesta afirmativa a esta pregunta.

TEOREMA 13.5. *Cualesquiera que sean tres números* a, b *y* c, *siempre que la suma de dos de estos números sea mayor que el tercero, existe un triángulo de lados iguales a* a, b, *y* c.

DEMOSTRACION. Consideremos los números a, b y c en orden de crecimiento. Supongamos, para puntualizar, que $a \leqslant b \leqslant c$. Pongamos

$$a_1 = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c}.$$

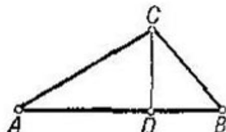


Fig. 103

Se tiene $a_1 > 0$ ya que $c \geqslant b$. El número a_1 es menor que a. En efecto,

$$a - a_1 = a - \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c} = \frac{b^2 - (c-a)^2}{2c}.$$

Puesto que $a + b > c$, se tiene $b > c - a > 0$. Por ello, $b^2 > (c - a)^2$. Es decir, $a > a_1$.

Construyamos el triángulo ABC del modo siguiente. Tomemos un segmento AB igual a c (fig. 103). Construyamos en la semirrecta AB desde el punto B el segmento BD igual a a_1. Tracemos por el punto D la perpendicular DC igual a $\sqrt{a^2 - a_1^2}$. Se afirma que los lados del triángulo ABC son a, b y c.

Efectivamente, el lado AB es igual a c. Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo ADC, obtenemos

$$BC^2 = BD^2 + CD^2 = a_1^2 + \left(\sqrt{a^2 - a_1^2}\right)^2 = a^2,$$

o sea, $BC = a$. Aplicando el teorema 13.3 al triángulo ABC, obtenemos

$$AC^2 = a^2 + c^2 - 2ca_1 = b^2,$$

o sea, $AC = b$. Queda demostrado el teorema.

Posición recíproca de dos circunferencias. El teorema 13.5 permite explicar con plenitud el problema sobre la posición recíproca de dos circunferencias en dependencia de sus radios y la distancia entre los centros. En concreto, demostraremos el teorema siguiente.

TEOREMA 13.6. *Sean dadas dos circunferencias distintas de centros* O_1 *y* O_2 *y de radios* R_1 *y* R_2, siendo $R_1 \leqslant R_2$, *y sea* d *la distancia entre los centros. Entonces*:

1. *Las circunferencias no se cortan, o sea, no tienen puntos comunes, si*

$$R_1 + R_2 < d \quad o \quad R_2 - R_1 > d.$$

2. *Las circunferencias tienen un punto común en el que son tangentes, es decir, tienen una tangente común, si*

$$R_1 + R_2 = d \quad o \quad R_2 - R_1 = d.$$

3. *Las circunferencias se cortan en dos puntos si*

$$R_1 + R_2 > d \quad y \quad R_2 - R_1 < d.$$

DEMOSTRACION. Comencemos por la primera afirmación del teorema. Supongamos que las circunferencias se cortan, es decir, que tienen un punto común A. Si los puntos

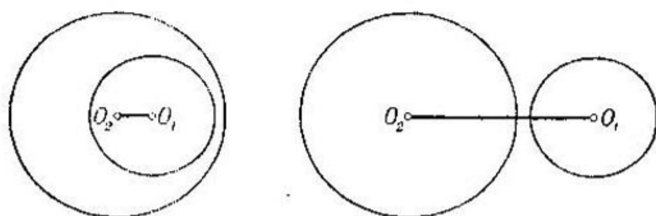


Fig. 104

O_1, O_2 y A no se hallan en una recta, se tiene $O_1A + O_2A > O_1O_2$, o sea, $R_1 + R_2 > d$. Pero esto contradice la condición $R_1 + R_2 < d$.

Supongamos que los puntos O_1, O_2 y A se hallan en una recta. Entonces, si el punto A está entre O_1 y O_2, se tiene $O_1A + AO_2 = O_1O_2$, o sea, $R_1 + R_2 = d$. Pero esto contradice la condición $R_1 + R_2 < d$. Si el punto O_1 se encuentra entre A y O_2, se tiene $O_1A + O_1O_2 = AO_2$, es decir, $R_1 + d = R_2$, de donde $R_2 - R_1 = d$. Pero esto contradice la condición $R_2 - R_1 > d$. En fin, si el punto O_2 aparece entre A y O_1, se tiene $O_2A + O_2O_1 = AO_1$, o sea, $R_2 + d = R_1$. Pero esto es imposible ya que $R_1 \leqslant R_2$. Por consiguiente, en el caso considerado las circunferencias no pueden tener punto común alguno, o sea, las circunferencias no se cortan (fig. 104).

Demostremos la segunda afirmación del teorema. En este caso, al igual que en el anterior, deducimos que las circunferencias no pueden tener un punto común A que no pertenezca a la recta O_1O_2. Pero tienen un punto común A situado en la recta O_1O_2, con la particularidad de que habrá dos variantes de posición de las circunferencias según sea $R_2 - R_1 = d$ (fig. 105, a la izquierda) o $R_1 + R_2 = d$

(fig. 105, a la derecha). En el punto común A las circunferencias tienen una tangente común perpendicular a la recta O_1O_2.

Demostremos, finalmente, la tercera afirmación del teorema. Observemos, ante todo, que se puede construir un

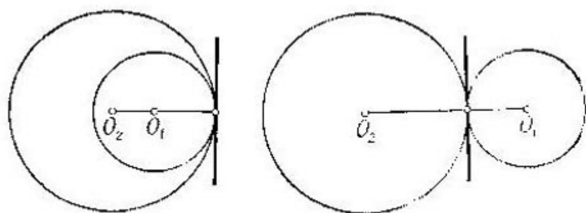


Fig. 105

triángulo de lados R_1, R_2 y d. En efecto, tenemos $R_1 + R_2 > d$; además, $R_1 + d > R_2$ porque $R_2 - R_1 < d$ y, en fin, $R_2 + d > R_1$ porque $R_2 \geqslant R_1$. Podemos construir este triángulo aplicando el método expuesto en la demostración del teorema 13.5. Tomemos el segmento O_1O_2 como el lado d y construyamos el tercer vértice A_1 de modo que sea $O_1A_1 = R_1$ y $O_2A_1 = R_2$. Construido el punto A_1, tomemos su reflexión especular respecto a la recta O_1O_2. Obtendremos un punto A_2. Los puntos A_1 y A_2 se encuentran en las circunferencias dadas ya que $O_1A_1 = R_1$ y $O_2A_1 = R_2$ por construcción y $O_1A_1 = O_1A_2$ y $O_2A_1 = O_2A_2$ debido a la simetría. Por eso, los puntos A_1 y A_2 son puntos de intersección de las circunferencias dadas (fig. 106).

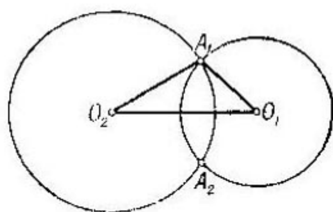


Fig. Fig. 106

Demostremos que las circunferencias no tienen más puntos de intersección que A_1 y A_2. Supongamos que existe un tercer punto de intersección A. Los triángulos $O_1O_2A_1$ y O_1O_2A serán entonces iguales por el tercer criterio de la igualdad de los triángulos. Supongamos, para concretar, que el punto A se halla en el mismo semiplano respecto a la recta O_1O_2 que el punto A_1. De la igualdad de los triángulos resulta la igualdad de los ángulos O_2O_1A y $O_2O_1A_1$ y, por consiguiente, la coincidencia de las semirrectas O_1A y

O_1A_1. Basándonos en la igualdad de los segmentos $O_1A = O_1A_1 = R_1$, deducimos la coincidencia de los puntos A y A_1. Queda demostrado el teorema.

Algunos problemas. PROBLEMA. *Sea ABC un triángulo. Exprésense a través de sus lados la mediana, la bisectriz y la altura trazadas desde el vértice C.*

SOLUCION. Comencemos por la mediana del triángulo (fig. 107). Sea O el pie de la mediana. Construyamos el punto D simétrico de C respecto al punto O, o sea, $OD = OC$.

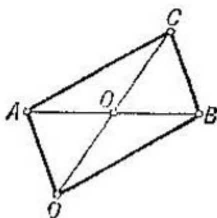


Fig. 107

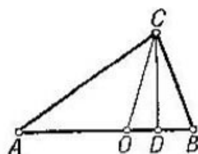


Fig. 108

Aplicando el teorema 13.4 al paralelogramo $ABCD$, obtenemos

$$AB^2 + (2\cdot OC)^2 = 2\cdot AC^2 + 2\cdot BC^2.$$

De aquí determinamos la mediana OC.

Hallemos la bisectriz CO (fig. 108). Según el teorema 12.5, el punto O —el pie de la bisectriz— divide el lado AB en segmentos proporcionales a los lados AC y BC. Esto permite determinar AO y OB siempre que se conozcan AB, AC y BC. Supongamos que AO y OB han sido determinados ya. Aplicando los teoremas 13.2 ó 13.3 a los triángulos ABC y AOC, obtenemos

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 \pm 2\cdot AB\cdot AD \quad \text{y}$$
$$OC^2 = AC^2 + AO^2 \pm 2\cdot AO\cdot AD.$$

Multiplicando la primera igualdad por AO y la segunda por AB y restándolas miembro por miembro, obtenemos una ecuación con una sola incógnita, la bisectriz OC. Precisamente de esta ecuación se determina la bisectriz.

Hallemos la altura CD (fig. 108). Determinemos, ante todo, el segmento AD basándonos en los teoremas 13.2 ó 13.3. Después encontramos del triángulo rectángulo ADC la altura CD.

PROBLEMA. *Sean a y b unos segmentos. Constrúyanse los segmentos* $\sqrt{a^2+b^2}$ *y* $\sqrt{a^2-b^2}$ siendo $a > b$ en el segundo caso.

SOLUCION. Tracemos una recta cualquiera y tomemos en ella el segmento AC igual a b (fig. 109). Tracemos por el punto C la recta perpendicular g. Tomemos en la recta g desde el punto C el segmento CB_1 igual al segmento a. Según el teorema de Pitágoras, tenemos

$$AB_1 = \sqrt{a^2+b^2}.$$

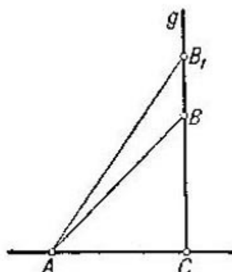


Fig. 109

Para construir el segmento $\sqrt{a^2-b^2}$, tracemos la circunferencia de centro A y de radio a. Corta la recta g en un punto B. Según el teorema de Pitágoras, tenemos

$$CB = \sqrt{a^2-b^2}.$$

Preguntas de repaso

1. Enúnciese y demuéstrese el teorema de Pitágoras.
2. Enúnciense y demuéstrense los teoremas sobre el cuadrado del lado opuesto a un ángulo obtuso o a un ángulo agudo en el triángulo oblicuángulo.
3. Demuéstrese que la suma de los cuadrados de las diagonales del paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de sus lados.
4. Demuéstrese que si tres segmentos a, b y c satisfacen las desigualdades

$$a+b>c, \quad a+c>b \quad \text{y} \quad b+c>a,$$

existe un triángulo de lados a, b y c.
5. ¿Cuál es la posición recíproca de dos circunferencias que tengan los radios R_1 y R_2, siendo $R_1 \leqslant R_2$, y la distancia entre los centros igual a d? Enúnciese y demuéstrese el teorema correspondiente.
6. Sean a y b unos segmentos. Constrúyanse los segmentos $\sqrt{a^2+b^2}$ y $\sqrt{a^2-b^2}$ siendo $a > b$ en el segundo caso.

Ejercicios

7. ¿Cuánto mide la hipotenusa del triángulo rectángulo de catetos iguales a 1 cm?
8. ¿Cuanto mide la altura del triángulo equilátero de lados iguales a 1 cm?
9. Hállense los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita del triángulo equilátero de lados iguales a 1 cm.
10. Demuéstrese que si en el triángulo ABC tiene lugar la desigualdad $AB^2 < AC^2 + CB^2$, el ángulo C es agudo. En cambio, si $AB^2 > AC^2 + CB^2$, el ángulo C es obtuso.
11. Demuéstrese que el lugar geométrico de los puntos para los cuales es constante la suma de los cuadrados de sus distancias hasta

dos puntos fijos A y B, es una circunferencia de centro en el punto medio del segmento AB.

12. Demuéstrese que el lugar geométrico de los puntos para los cuales es constante la diferencia de los cuadrados de sus distancias hasta dos puntos fijos A y B, es una recta perpendicular a la AB.

13. Demuéstrese que de dos cuerdas de la circunferencia, la mayor es la más próxima al centro.

14. Hállese la expresión para las medianas del triángulo conociéndose sus lados.

15. Sean ABC un triángulo y D el pie de la bisectriz trazada desde el vértice C. Demuéstrese que

$$CD^2 = AC \cdot BC - AD \cdot BD.$$

16. Sean a, b y c los lados del triángulo. Demuéstrese que la altura h_a relativa al lado a se determina mediante la fórmula

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

donde p es el semiperímetro del triángulo, o sea,

$$p = \frac{a+b+c}{2}.$$

17. Determínese la base del triángulo isósceles de 36° de ángulo en el vértice y de laterales iguales a 1 cm. (*Sugerencia.* Véase el ejercicio 15 del § 12.)

§ 14. FUNCIONES TRIGONOMETRICAS DEL ÁNGULO

Definición de las funciones trigonométricas. Tracemos una semicircunferencia de radio igual a la unidad (fig. 110).

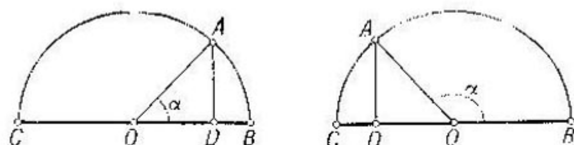


Fig. 110

Tomemos un punto cualquiera A de la semicircunferencia e indiquemos por α el ángulo AOB. Tracemos desde el punto A la perpendicular AD al diámetro BC. Se llama *seno* del ángulo α la longitud del segmento AD. El seno del ángulo α se designa así: sen α. Por definición, se acepta que sen 0° = 0 y que sen 180° = 0.

Definamos ahora el concepto del *coseno* del ángulo. El coseno del ángulo α se designa así: cos α. Si el ángulo α es agudo, el cos α es igual a la longitud del segmento OD (fig. 110, a la izquierda). Si el ángulo α es obtuso, el cos α es un número negativo cuyo valor absoluto es igual a la longitud del segmento OD (fig. 110, a la derecha). Por definición, aceptamos que $\cos 0° = 1$, que $\cos 90° = 0$ y que $\cos 180° = -1$.

Se llama *tangente* del ángulo α la razón del sen α y del cos α

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}.$$

La tangente del ángulo α no está definida si $\alpha = 90°$.

Las funciones sen α, cos α y tg α se llaman *funciones trigonométricas del ángulo* α.

TEOREMA 14.1. *Cualquiera que sea α se tiene*

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

DEMOSTRACION. Para $\alpha = 0°$, $90°$ ó $180°$ la afirmación del teorema se comprueba introduciendo los valores correspondientes del seno y del coseno.

Si el ángulo α es agudo, la afirmación resulta del teorema de Pitágoras aplicado al triángulo ODA (fig. 110, a la izquierda). Si el ángulo α es obtuso, la afirmación también resulta del teorema de Pitágoras aplicado al triángulo ODA (fig. 110, a la derecha).

Fórmulas de reducción. Se llaman *fórmulas de reducción* las que establecen la relación entre las funciones trigonométricas de los ángulos α, $90° - \alpha$ y $180° - \alpha$.

TEOREMA 14.2. *Si el ángulo α es agudo, se tiene*

$$\operatorname{sen}(90° - \alpha) = \cos \alpha,$$
$$\cos(90° - \alpha) = \operatorname{sen} \alpha,$$
$$\operatorname{tg}(90° - \alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

DEMOSTRACION (fig. 111). Sean el ángulo AOB igual a α y el ángulo A_1OB igual a $90° - \alpha$. Los triángulos rectángulos ODA y A_1D_1O son iguales, pues sus hipotenusas son iguales en tanto que radios y los ángulos AOD y OA_1D_1 son iguales a α. De la igualdad de estos triángulos resulta

que $A_1D_1 = OD$ y que $OD_1 = AD$, o sea, que

$$\operatorname{sen}(90° - \alpha) = \cos\alpha \quad \text{y} \quad \cos(90° - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha.$$

La tercera fórmula se obtiene dividiendo miembro por miembro la primera fórmula por la segunda. Queda demostrado el teorema.

TEOREMA 14.3. *Cualquiera que sea* α *se tiene*

$$\operatorname{sen}(180° - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha \quad \text{y} \quad \cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha.$$

DEMOSTRACION. Para $\alpha = 0°$, $90°$ ó $180°$ la afirmación del teorema se comprueba introduciendo en las fórmulas

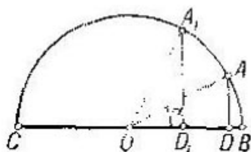


Fig. 111

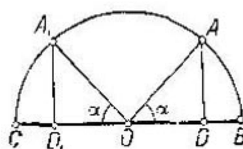


Fig. 112

los valores correspondientes del seno y del coseno. Consideremos el caso general.

Sean el ángulo AOB igual a α y el ángulo A_1OB igual a $180° - \alpha$ (fig. 112). La igualdad de los triángulos OAD y OA_1D_1 implica que $AD = A_1D_1$, o sea, que $\operatorname{sen}(180° - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha$.

Si α es distinto de $90°$, uno de los ángulos α ó $180° - \alpha$ es agudo y el otro es obtuso. Por esto, el $\cos\alpha$ y el $\cos(180° - \alpha)$ llevan signos opuestos. Como quiera que $OD = OD_1$, resulta que $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$. Queda demostrado el teorema.

Relaciones entre los lados y los ángulos en el triángulo rectángulo. TEOREMA 14.4. *En el triángulo rectángulo* ABC *de ángulo recto* C *se tiene*

$$BC = AB\cdot\operatorname{sen}A,\quad AC = AB\cdot\cos A$$
$$\text{y } BC = AC\cdot\operatorname{tg}A.$$

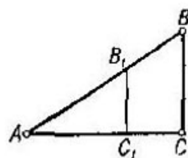


Fig. 113

DEMOSTRACION (fig. 113). Tomemos en la semirrecta AB el segmento AB_1 igual a la unidad y tracemos desde el punto B_1 la perpendicular a la recta AC. Según la definición del seno y del coseno, tendremos $\operatorname{sen}A = B_1C_1$ y $\cos A = AC_1$. Los triángulos AB_1C_1 y ABC son semejantes, pues tienen el ángulo A común y los

ángulos C y C_1 rectos. Esto implica que

$$\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{AB}{1};\ \frac{AC}{AC_1}=\frac{AB}{1}\ \text{y}\ \frac{BC}{AC}=\frac{B_1C_1}{AC_1}.$$

Introduciendo aquí $B_1C_1 = \text{sen}\, A$ y $AC_1 = \cos A$, obtenemos

$$BC = AB\cdot\text{sen}\, A,\quad AC = AB\cdot\cos A\quad \text{y}\quad BC = AC\cdot\text{tg}\, A.$$

Queda demostrado el teorema.

TEOREMA 14.5.

$$\text{sen}\, 45°=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \cos 45°=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \text{tg}\, 45°=1,$$

$$\text{sen}\, 30°=\frac{1}{2},\ \cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \text{tg}\, 30°=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

DEMOSTRACION. Construyamos el triángulo rectángulo ABC de ángulo recto C y de ángulo A igual a 45° (fig. 114).

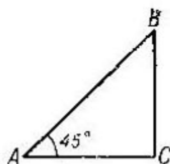


Fig. 114

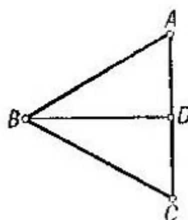


Fig. 115

El ángulo B de este triángulo también es igual a 45°. Por consiguiente, el triángulo resulta isósceles: $AC = BC$. Aplicándole el teorema de Pitágoras, obtenemos

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 = 2\cdot BC^2 = 2\cdot AC^2.$$

De aquí resulta que $\text{sen}\, 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y que $\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Por consiguiente, $\text{tg}\, 45° = 1$. Construyamos ahora el triángulo equilátero ABC (fig. 115). Todos sus ángulos son iguales. Por lo tanto, cada uno de ellos vale 60°. Tracemos la mediana BD del triángulo. Es bisectriz y altura. Por esto, en el triángulo ABD el ángulo ADB es recto y el ángulo ABD es igual a 30°. Puesto que $AD = \frac{AC}{2}$, tenemos $\text{sen}\, 30° =$

$= \frac{1}{2}$. Aplicando el teorema 14.1, encontramos que $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Después obtenemos que $\operatorname{tg} 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Las fórmulas de reducción permiten determinar los valores del seno, del coseno y de la tangente para los ángulos de 60,° 120°, 135° y 150° expresándolos en términos del seno, del coseno y de la tangente de los ángulos de 30° y de 45°.

Para los senos, cosenos y tangentes de los ángulos agudos existen tablas especiales. Estas tablas permiten hallar, a partir del ángulo dado, el seno, el coseno y la tangente correspondientes y, recíprocamente, dados el seno, el coseno o la tangente hallar el ángulo correspondiente.

El teorema 14.4 permite hallar con esas tablas todos los elementos del triángulo rectángulo, es decir, sus lados y ángulos, en caso de conocerse dos catetos, la hipotenusa y un cateto, un ángulo agudo y un cateto o un ángulo agudo y la hipotenusa.

Teorema del coseno. TEOREMA 14.6. *Cualquiera que sea el triángulo ABC se tiene*

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos C.$$

DEMOSTRACION. Si el ángulo C es igual a 90°, la afirmación del teorema se desprende del teorema de Pitágoras ya que $\cos 90° = 0$.

Sea C un ángulo agudo (fig. 101). Según el teorema 13.3, tenemos

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot BC \cdot CD.$$

Aplicando el teorema 14.4 al triángulo ACD, encontramos $CD = AC \cdot \cos C$. Por esto,

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot BC \cdot AC \cdot \cos C.$$

Sea ahora C un ángulo obtuso (fig. 100). Según el teorema 13.2, tenemos

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2 \cdot BC \cdot CD.$$

Aplicando el teorema 14.4 al triángulo ADC, encontramos $CD = AC \cdot \cos(\angle ACD)$. Pero el ángulo ACD complementa hasta 180° el ángulo C del triángulo ABC. Por esto, en virtud del teorema 14.3, tenemos $\cos(\angle ACD) = -\cos C$ y, por consiguiente, $AC \cdot \cos C = -CD$. Es decir, también en el

caso de ángulo obtuso resulta

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot BC \cdot AC \cdot \cos C.$$

Queda demostrado el teorema.

Teorema de los senos. TEOREMA 14.7. *Cualquiera que sea el triángulo ABC se tiene*

$$\frac{\operatorname{sen} A}{BC} = \frac{\operatorname{sen} B}{AC} = \frac{\operatorname{sen} C}{AB}.$$

DEMOSTRACION. Consideremos la circunferencia que circunscribe el triángulo ABC. Sea B_1 el punto de la circunferencia diametralmente opuesto al punto B de la circunferencia (fig. 116).

Si los puntos A y B_1 están a un lado de la recta BC (fig. 116, a la izquierda), los ángulos BB_1C y BAC son

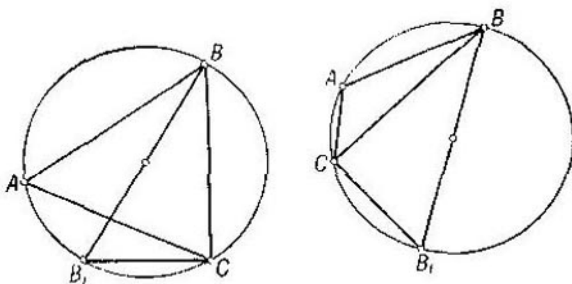


Fig. 116

iguales por ser ángulos inscritos correspondientes a un mismo arco. Si los puntos A y B_1 se encuentran a distintos lados de la recta BC (fig. 116, a la derecha), estos ángulos se complementan hasta 180°, pues corresponden a arcos complementarios. En ambos casos se tiene $\operatorname{sen} B_1 = \operatorname{sen} A$. Por consiguiente, $BC = 2R \operatorname{sen} A$.

Análogamente se demuestra que $AB = 2R \operatorname{sen} C$ y que $AC = 2R \operatorname{sen} B$. Comparando las tres fórmulas obtenidas, deducimos que

$$\frac{\operatorname{sen} A}{BC} = \frac{\operatorname{sen} B}{AC} = \frac{\operatorname{sen} C}{AB} = \frac{1}{2R}.$$

Queda demostrado el teorema.

El teorema del coseno y el teorema de los senos permiten determinar todos los elementos del triángulo —o sea, sus

ángulos y sus lados— si se conocen tres elementos que determinan unívocamente el triángulo. Estos elementos pueden ser: tres lados del triángulo; dos lados y el ángulo comprendido entre los mismos; un lado y dos ángulos.

Preguntas de repaso y ejercicios

1. Dese la definición de las funciones trigonométricas $\operatorname{sen}\alpha$, $\cos\alpha$ y $\operatorname{tg}\alpha$.

2. Demuéstrese el teorema: $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

3. Demuéstrense las fórmulas de reducción: $\operatorname{sen}(90° - \alpha) = \cos\alpha$, $\cos(90° - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha$, $\operatorname{tg}(90° - \alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$, $\operatorname{sen}(180° - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha$ y $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$.

4. Demuéstrese que en el triángulo rectángulo ABC de ángulo recto C se tiene

$$BC = AB \cdot \operatorname{sen} A, \quad AC = AB \cdot \cos A \quad \text{y} \quad BC = AC \cdot \operatorname{tg} A.$$

5. Demuéstrese que

$$\operatorname{sen} 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \operatorname{tg} 45° = 1,$$

$$\operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2}, \quad \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \operatorname{tg} 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

6. Hállense las funciones trigonométricas para los ángulos de 60°, 120°, 135° y 150°.

7. Enúnciese y demuéstrese el teorema del coseno.

8. Enúnciese y demuéstrese el teorema de los senos.

9. ¿Cuáles son los tres elementos del triángulo que lo determinan unívocamente?

10. Hállese el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo, si uno de sus lados es igual a 1 cm y el ángulo opuesto a este lado es de 30°.

§ 15. POLÍGONOS

Polígonos convexos. Un *polígono* $A_1A_2 \ldots A_n$ es una figura formada por los puntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ y por los segmentos $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_nA_1$ que los unen (fig. 117). Los puntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ se llaman *vértices* del polígono y los segmentos $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_nA_1$ se denominan *lados* del mismo. Dos vértices se llaman *contiguos* si quedan unidos por un lado del polígono. Para todo vértice existen dos vértices contiguos.

Cada una de las rectas A_1A_2, A_2A_3, . . ., A_nA_1 divide el plano en dos semiplanos. El polígono $A_1A_2 \ldots A_n$ se denomina *convexo* si está situado en un semiplano respecto

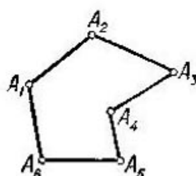


Fig. 117

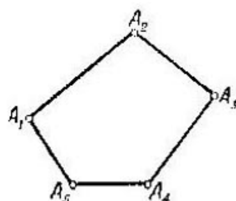


Fig. 118

a cada una de estas rectas con la particularidad de que toda recta A_pA_{p+1} no tiene más puntos comunes con el polígono que los puntos del segmento A_pA_{p+1} (fig. 118).

TEOREMA 15.1. *Si los extremos de la quebrada $B_1B_2 \ldots B_n$ se hallan en diferentes semiplanos respecto a la recta b, la quebrada corta la recta b.*

DEMOSTRACION. Desplazándonos a lo largo de la quebrada desde el vértice B_1 hacia B_n, encontraremos dos vértices contiguos que se encuentran en distintos semiplanos respecto a la recta b. El lado de la quebrada que une estos vértices corta la recta b. Por consiguiente, la quebrada corta la recta b. Queda demostrado el teorema.

TEOREMA 15.2. *Si una recta tiene tres puntos comunes con un polígono convexo, contiene uno de sus lados.*

DEMOSTRACION. Sean A, B y C tres puntos de una recta a que pertenecen a un polígono. Supongamos, para concretar, que el punto B se halla entre A y C. El punto B pertenece a uno de los lados del polígono. Afirmamos que este lado pertenece a la recta a. Efectivamente, en el caso contrario la recta que contiene este lado separaría los puntos A y C. Pero esto contradice la hipótesis de que el polígono es convexo. Queda demostrado el teorema.

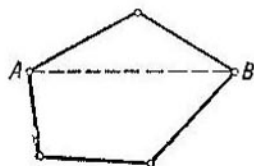


Fig. 119

Suma de los ángulos del polígono convexo. Se llama *diagonal* del polígono todo segmento que une dos vértices no contiguos. En la fig. 119 la línea punteada representa una diagonal.

TEOREMA 15.3. *La diagonal A_1A_p divide el polígono convexo $A_1A_2 \ldots A_n$ en dos polígonos convexos $A_1A_2 \ldots A_p$ y $A_pA_{p+1} \ldots A_nA_1$. Estos polígonos están en diferentes semiplanos respecto a la recta A_1A_p. La semirrecta A_1A_p pasa entre las semirrectas A_1A_2 y A_1A_n.*

DEMOSTRACION. Según el teorema 15.2, la recta A_1A_p no tiene más puntos comunes con el polígono que los puntos A_1 y A_p. En virtud del teorema 15.1, la quebrada $A_1A_2 \ldots$ $\ldots A_p$ está a un lado de la recta A_1A_p. Puesto que el polígono inicial se encuentra a un lado de cada una de las rectas A_1A_2, A_2A_3, ..., el polígono $A_1A_2 \ldots A_p$ posee la misma propiedad. Por consiguiente, el polígono $A_1A_2 \ldots$ $\ldots A_p$ es convexo. Análogamente se demuestra que es convexo el polígono $A_pA_{p+1} \ldots A_nA_1$.

Demostremos las demás afirmaciones del teorema. La semirrecta A_1A_p se encuentra en el mismo semiplano respecto a la recta A_1A_n que la semirrecta A_1A_2 y en el mismo semiplano respecto a la recta A_1A_2 que la semirrecta A_1A_n. Esto significa que la semirrecta A_1A_p pasa entre las semirrectas A_1A_2 y A_1A_n. Es decir, la semirrecta A_1A_p las separa.

Por consiguiente, los puntos A_2 y A_n se hallan en diferentes semiplanos respecto a la recta A_1A_p. Pero esto significa que los polígonos $A_1A_2 \ldots A_p$ y $A_pA_{p+1} \ldots A_nA_1$ están en diferentes semiplanos respecto a la recta A_1A_p. Queda demostrado el teorema.

Sea A un vértice del polígono convexo y sean B y C sus vértices contiguos. Se llama *ángulo interno* de vértice A del polígono el ángulo comprendido entre las semirrectas AB y AC. El ángulo adyacente al ángulo interno se denomina *ángulo externo* del polígono.

TEOREMA 15.4. *La suma de los ángulos internos del polígono convexo es igual a* $(n - 2)\,180°$, *donde n es el número de lados o de vértices del polígono.*

La suma de los ángulos externos del polígono convexo no depende de n y es igual a 360°.

DEMOSTRACION. Todo triángulo es convexo y entra en el teorema ya que $(3 - 2)\,180° = 180°$. Apliquemos para la demostración del teorema el método de inducción matemática. Supongamos que el teorema es válido para todos los polígonos con un número de lados menor que n. Demostremos que es cierto para todo polígono de n lados.

Sea Q un polígono de n lados. Unamos sus dos vértices no contiguos A y B mediante la diagonal AB. En virtud del teorema 15.3, obtendremos dos polígonos Q_1 y Q_2 de n_1 y de n_2 lados, respectivamente, siendo $n_1 < n$, $n_2 < n$ y $n_1 + n_2 = n + 2$. Puesto que la diagonal AB pasa entre los lados contiguos de vértice común A, el ángulo interno de vértice A en el polígono Q resulta igual a la suma de los ángulos internos de vértice A en los polígonos Q_1 y Q_2. Análogamente, el ángulo de vértice B en el polígono Q es igual a la suma de los ángulos de vértice B en los polígonos Q_1 y Q_2. De aquí resulta que la suma de los ángulos del polígono Q es igual a $(n_1 - 2)\,180° + (n_2 - 2)\,180° = (n - 2)\,180°$. Queda demostrada la primera afirmación del teorema.

Puesto que todo ángulo externo del polígono es adyacente al ángulo interno correspondiente y puesto que la suma de los ángulos adyacentes es igual a 180°, resulta que la suma de los ángulos externos del polígono es igual a $180°\,n - (n - 2)\,180°$, es decir, es igual a 360°. Queda demostrado el teorema.

Polígono complementado. Quebrada convexa. Sea $A_1A_2 \ldots A_n$ un polígono convexo. Cada una de las rectas A_1A_2, A_2A_3, ..., A_nA_1 divide el plano en dos semiplanos. Marquemos aquellos semiplanos que contienen el polígono. Diremos que el punto X se halla *en el interior* del polígono si pertenece a todos los semiplanos marcados y no pertenece al polígono.

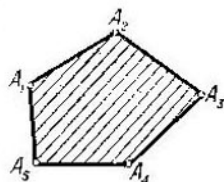


Fig. 120

Frecuentemente, se denomina polígono la figura formada, además de los lados y los vértices, también por los puntos del plano que se hallan en el interior del polígono. El polígono comprendido en este sentido será llamado *polígono complementado*. El propio polígono constituye la frontera del polígono complementado. En la fig. 120 se ha sombreado el polígono complementado.

Sean P_1 y P_2 dos polígonos convexos y sean P_1' y P_2' los polígonos complementados correspondientes. Diremos que el polígono P_1 se encuentra *en el interior* del polígono P_2 si todo punto del polígono complementado P_1' pertenece al polígono complementado P_2'. Se llama *perímetro* del polígono la suma de las longitudes de sus lados.

TEOREMA 15.5. *Si un polígono convexo P_1 pertenece al interior de un polígono convexo P_2, el perímetro de P_1 no es mayor que el perímetro de P_2. Si el polígono P_1 no coincide con P_2, su perímetro es menor que el perímetro de P_2.*

DEMOSTRACION. Tracemos una recta a que contenga uno de los lados del polígono P_1 (fig. 121). El polígono P_1 está a un lado de esta recta. El polígono P_2 está a un lado de la recta a o existen puntos del polígono P_2 que se hallan a distintos lados de la recta a. En el segundo caso la recta a corta el polígono P_2 en dos puntos A y B. Efectivamente, sean C y D dos puntos del polígono P_2 que se encuentran a distintos lados de la recta a. Los puntos C y D dividen el polígono P_2 en dos quebradas. En virtud del teorema 15.1, cada una de éstas corta la recta a.

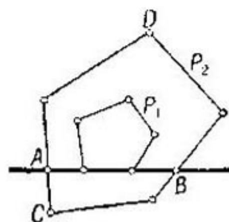


Fig. 121

La recta a divide el polígono P_2 en dos polígonos. Sea Q_2 aquel que está respecto a la recta a en el mismo semiplano que el polígono P_1. El polígono Q_2 contiene en su interior el polígono P_1 y su perímetro es menor que el perímetro del polígono P_2. Efectivamente, para pasar del polígono P_2 al polígono Q_2 debemos sustituir la quebrada por el segmento AB que une sus extremos.

Realizando semejante construcción con cada uno de los lados del polígono P_1, obtenemos finalmente del polígono P_2 el polígono P_1. De aquí resulta que si el polígono P_1 no coincide con P_2, su perímetro es menor que el perímetro de P_2.

Queda demostrado el teorema.

La quebrada γ: $A_1A_2 \ldots A_n$ se llama *convexa* si es convexo el polígono P: $A_1A_2 \ldots A_n$. Una quebrada γ': $A_1A_2'A_3' \ldots A_n$ se llama *abarcante* de la quebrada convexa γ si ambas quebradas están situadas en un mismo semiplano respecto a la recta A_1A_n y la quebrada γ' no contiene puntos interiores del polígono P (fig. 122).

TEOREMA 15.6. *La longitud de toda quebrada γ' que abarca la quebrada convexa γ no es menor que la longitud de γ. Si las quebradas no coinciden, γ' es de mayor longitud.*

DEMOSTRACION (fig. 123). Tracemos la recta a por uno de los lados de la quebrada γ. Desplazándonos a lo largo de la quebrada γ' de su punto inicial A a su punto final B,

marquemos los puntos primero y último de la quebrada γ' pertenecientes a la recta a. Sean éstos los puntos C y D. Sustituyamos la parte CD de la quebrada γ' por el segmento rectilíneo CD. La quebrada así obtenida también abarca la quebrada γ y su longitud no es mayor que la de γ'; además, su longitud es desde luego menor si la quebrada γ' posee puntos situados a diferentes lados de la recta a. Realizando esta operación tantas veces como lados posee la quebrada γ, obtendremos finalmente la quebrada γ. De aquí resulta

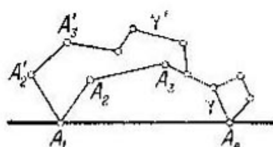


Fig. 122

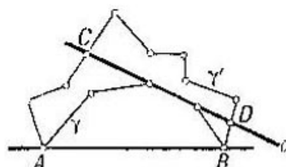


Fig. 123

que la longitud de la quebrada γ' no es menor que la de γ. Si la quebrada γ' no coincide con γ, su longitud será mayor.

Queda demostrado el teorema.

Polígonos regulares. El polígono convexo se denomina *regular* si sus lados son iguales y sus ángulos son iguales. Puesto que la suma de los ángulos externos de todo polígono convexo es igual a 360° y puesto que la suma de sus ángulos internos es igual a $(n - 2)\,180°$, resulta que los ángulos externos del polígono regular de n lados son iguales a $\frac{360°}{n}$ y sus ángulos internos son iguales a $\frac{(n-2)\,180°}{n}$.

Son iguales los polígonos regulares de n lados cuyos lados son iguales. O sea, los polígonos coinciden por efecto de un movimiento.

Sean P_1: $A_1A_2 \ldots A_n$ y P_2: $B_1B_2 \ldots B_n$ dos polígonos regulares de n lados. Hagamos coincidir, por efecto de un movimiento, los segmentos B_1B_2 y A_1A_2 de modo que el polígono P_2 quede al mismo lado de la recta A_1A_2 que el polígono P_1. Este movimiento puede ser realizado, por ejemplo, de la manera siguiente.

Primero hacemos coincidir el punto B_1 con el punto A_1 mediante una reflexión especular respecto a la perpendicular trazada por el punto medio del segmento A_1B_1. El punto B_2 se transforma entonces en un punto B_2'. Ahora hacemos coin-

cidir el punto B_2' con A_2 valiéndonos de una reflexión especular respecto a la perpendicular trazada por el punto medio del segmento A_2B_2'. Si resulta que los polígonos P_2 y P_1 están en diferentes semiplanos respecto a la recta A_1A_2, aplicamos, además, una reflexión especular respecto a esta recta.

Afirmamos que después de hacer coincidir de esta forma los lados B_1B_2 y A_1A_2 los polígonos P_1 y P_2 quedan superpuestos. Efectivamente, como quiera que los ángulos $A_1A_2A_3$ y $B_1B_2B_3$ son iguales, las semirrectas A_2A_3 y B_2B_3 coinciden. Puesto que los segmentos A_2A_3 y B_2B_3 son iguales, coinciden los puntos B_3 y A_3. Ambos polígonos están en un mismo semiplano respecto a la recta A_2A_3; a saber, en el semiplano al que pertenece el vértice común A_1 de ambos. A continuación, deducimos de la misma forma que coinciden los vértices B_4 y A_4, los vértices B_5 y A_5, etc., o sea, que los polígonos P_1 y P_2 quedan superpuestos.

TEOREMA 15.7. *Las perpendiculares trazadas por los puntos medios de los lados del polígono regular y las bisectrices de los ángulos internos del polígono regular son ejes de simetría del mismo* (fig. 124).

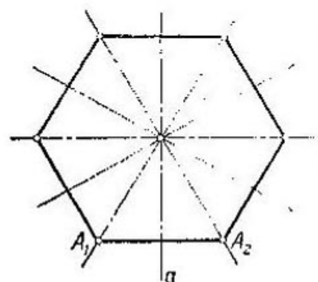


Fig. 124

DEMOSTRACION. Sea a la perpendicular trazada por el punto medio del lado A_1A_2 del polígono regular P: $A_1A_2 \ldots \ldots, A_n$. La simetría respecto a la recta a transforma el polígono P en el polígono P': $A_2A_1A_3'A_4' \ldots A_n'$. Ambos polígonos P y P' se encuentran a un lado de la recta A_1A_2. Repitiendo el razonamiento anterior, veremos que A_3' coincide con A_3, que A_4' coincide con A_4, etc. Pero esto significa que la simetría respecto a la recta a transforma el polígono P en sí mismo, o sea, que la recta a es eje de simetría. En el caso de las bisectrices de los ángulos la demostración es análoga.

Queda demostrado el teorema.

Polígonos inscritos y circunscritos. El polígono convexo se llama *inscrito* en una circunferencia si sus vértices se hallan en ella. El polígono convexo se denomina *circunscrito* a una circunferencia si sus lados son tangentes a ella.

TEOREMA 15.8. *Todo polígono regular está inscrito en una circunferencia y circunscrito a una circunferencia.*

DEMOSTRACION. Sea $A_1A_2 \ldots A_n$ un polígono regular. Tracemos la circunferencia k que pasa por los puntos A_1, A_2 y A_3 (fig. 125). Su centro O está en la perpendicular a trazada por el punto medio del segmento A_2A_3. La recta a es eje de simetría del polígono y eje de simetría de la circunferencia k. Por consiguiente, el vértice A_4, simétrico del vértice A_1 respecto a la recta a, pertenece a la circunferencia k. Tomando ahora los puntos A_2, A_3 y A_4, demostraremos de la misma forma que A_5 se encuentra en la circunferencia que pasa por estos puntos, o sea, en la circunferencia k. Y así sucesivamente. Como resultado obtenemos que todos los puntos A_1, A_2, ..., A_n se hallan en la circunferencia k, es decir, que dicha circunferencia es la circunscrita al polígono.

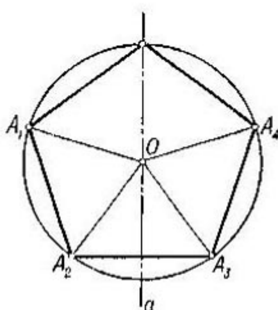


Fig. 125

Todos los triángulos isósceles A_1OA_2, A_2OA_3, A_3OA_4, ... son iguales, pues sus bases A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, ... son iguales y sus laterales coinciden en tanto que radios. Por consiguiente, son iguales las alturas de estos triángulos trazadas desde el vértice O. La circunferencia de centro O y de radio igual a estas alturas es tangente a todos los lados del polígono, o sea, es la circunferencia inscrita. Queda demostrado el teorema.

Polígonos semejantes. De acuerdo con la definición general de la semejanza de las figuras, dos polígonos son *semejantes* si uno puede ser aplicado en el otro mediante una transformación de semejanza.

TEOREMA 15.9. *Son semejantes los polígonos regulares de un mismo número de lados.*

DEMOSTRACION. Sean P: $A_1A_2 \ldots A_n$ y Q: $B_1B_2 \ldots B_n$ dos polígonos regulares. Indiquemos la razón de sus lados por $k = \frac{A_1A_1}{B_1B_2}$. Sometamos el polígono Q a una transformación de homotecia respecto al centro de la circunferencia circunscrita siendo k el coeficiente de homotecia. Obtendremos entonces el polígono regular Q': $B'_1B'_2 \ldots B'_n$ con

los mismos lados que el póligono P. El polígono Q' es igual al polígono P, es decir, se superpone con este por efecto de un movimiento. Una homotecia y un movimiento realizados sucesivamente dan una transformación de semejanza. Por

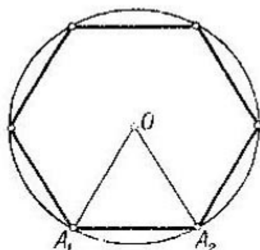


Fig. 126

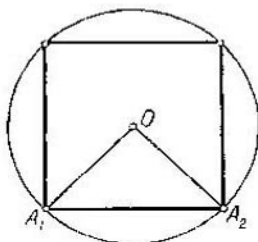


Fig. 127

consiguiente, el polígono Q se aplica en P mediante una transformación de semejanza. Esto significa que los polígonos P y Q son semejantes. Queda demostrado el teorema.

Determinemos los lados de algunos polígonos regulares en dependencia del radio R de la circunferencia circunscrita.

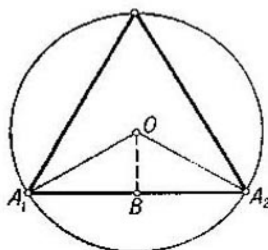


Fig. 128

Comencemos por el hexágono (fig. 126). Sus ángulos internos son de 120°. Por esto, en el triángulo A_1OA_2 los ángulos de vértice A_1 y A_2 son iguales a 60°, o sea, el triángulo es equilátero. De aquí deducimos que *el lado del hexágono regular es igual al radio R de la circunferencia circunscrita.*

En el caso del cuadrilátero regular los ángulos internos son de 90°, o sea, el cuadrilátero es un cuadrado (fig. 127). En el triángulo A_1OA_2 los ángulos A_1 y A_2 son de 45° y el ángulo O es recto. Por eso,

$$A_1A_2 = \frac{OA_1}{\cos 45^\circ} = R\sqrt{2}.$$

En el caso del triángulo regular, los ángulos A_1 y A_2 del triángulo A_1OA_2 son de 30° (fig. 128). Tracemos desde O la perpendicular al lado A_1A_2. Tendremos

$$A_1A_2 = 2 \cdot A_1B = 2 \cdot OA_1 \cdot \cos 30^\circ = R\sqrt{3}.$$

Preguntas de repaso y ejercicios

1. ¿Qué es polígono? ¿Qué polígono se llama convexo?

2. Demuéstrese que si los extremos de la quebrada $B_1B_2 \ldots B_n$ están en distintos semiplanos respecto a la recta b, la quebrada corta esta recta.

3. Demuéstrese que si una recta tiene tres puntos comunes con un polígono convexo, contiene uno de sus lados.

4. Demuéstrese que toda diagonal de un polígono convexo lo divide en dos polígonos convexos situados a distintos lados de esta diagonal.

5. Demuéstrese que la suma de los ángulos internos del polígono convexo de n lados es igual a $(n - 2)\ 180°$ y que la suma de sus ángulos externos es igual a 360°.

6. ¿Qué es polígono complementado?

7. Enúnciese y demuéstrese el teorema de la relación entre los perímetros de dos polígonos convexos si uno está contenido en el otro.

8. ¿Puede colocarse el triángulo regular de lado de 4 cm en el interior del cuadrado de lado de 3 cm?

9. Enúnciese y demuéstrese el teorema de la relación entre las longitudes de una quebrada convexa y de una quebrada que la abarca.

10. Demuéstrese que los polígonos regulares de n lados son iguales si sus lados son iguales.

11. ¿Cuáles son los ejes de simetría del polígono regular? Enúnciese y demuéstrese el teorema correspondiente

12. Demuéstrese que todo polígono regular está inscrito en una circunferencia y circunscrito a una circunferencia.

13. Demuéstrese que los polígonos regulares de igual número de lados son semejantes.

14. Demuéstrese que los perímetros de los polígonos regulares de igual número de lados son uno al otro como los radios de las circunferencias inscritas o como los radios de las circunferencias circunscritas.

15. ¿Cuánto miden los lados del hexágono, el cuadrilátero y el triángulo regulares si el radio de la circunferencia circunscrita es R?

16. Establezcase la relación entre el radio de la circunferencia y los lados de los polígonos regulares de igual número de lados inscrito y circunscrito a la misma.

17. Exprésese el lado del octágono regular a través del radio de la circunferencia circunscrita.

18. Exprésese el lado del decágono regular a través del radio de la circunferencia circunscrita. (*Sugerencia.* Véase el ejercicio 17 del § 13.)

19. Exprésese el lado del pentágono regular a través del radio de la circunferencia circunscrita.

§ 16. AREAS DE FIGURAS

Concepto del área. El problema de la determinación del área de las figuras se remonta a la antigüedad. Surgió en relación con la actividad práctica del hombre.

Imaginemos dos parcelas de terreno: una cuadrada y otra de forma arbitraria (fig. 129). Supongamos que ambas han

sido sembradas de trigo empleándose para la primera m kg de grano y n kg para la segunda. Lo natural es considerar que la segunda parcela es $\frac{n}{m}$ veces mayor que la primera. Llamaremos área de la segunda parcela el número que indica cuántas veces es mayor que la primera. La primera parcela es la unidad de medición. De esta definición del área se obtienen las siguientes propiedades de la misma.

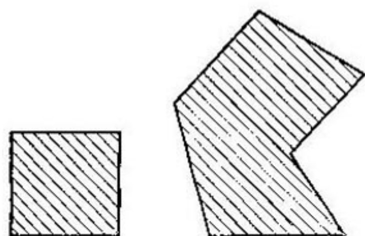


Fig. 129

Primero, puesto que para sembrar toda parcela se necesita una cantidad determinada de grano, resulta que *toda parcela posee un área determinada.*

Segundo, para sembrar dos parcelas iguales se necesita la misma cantidad de grano y, por eso, *las parcelas iguales tienen igual área.*

Tercero, si dividimos la parcela en dos partes, la cantidad de grano necesaria para sembrar toda la parcela constará de las cantidades de grano necesarias para sembrar cada una de sus partes. Por ello, *el área de toda la parcela es igual a la suma de las áreas de sus partes.*

Ateniéndonos a esta definición, para hallar el área de una parcela es necesario realizar la siembra. Pero, en la práctica el problema debe ser resuelto precisamente en sentido inverso. Se exige conocer la cantidad de trigo necesaria para la siembra antes de realizar ésta. Si conociésemos el área de la parcela, podríamos determinar esta cantidad de trigo multiplicando el área por la cantidad de trigo necesaria para la siembra de una unidad de área. ¿Cómo determinar, pues, el área de la parcela?

Ahora demostraremos que *las tres propiedades señaladas del área la determinan completamente* y encontraremos las fórmulas que permiten calcular el área de las figuras simples.

Una figura se llama *simple* si puede ser dividida en triángulos. En particular, son figuras simples, por ejemplo, el paralelogramo, el trapecio y el polígono regular.

Area del rectángulo. Determinemos primero el área del rectángulo. En la fig. 130 representamos un cuadrado como

unidad de medición y un rectángulo cuya área debe ser medida.

Dividamos los lados del cuadrado en N partes iguales y tracemos por los puntos de división rectas paralelas a sus lados. El cuadrado quedará dividido en N^2 cuadrados pequeños. En la figura, el lado del cuadrado ha sido dividido en 5 partes. El número de los cuadrados pequeños es de $5 \times 5 = 25$.

Determinemos el área del cuadrado pequeño. Por la propiedad del área, el cuadrado grande tiene un área igual a la

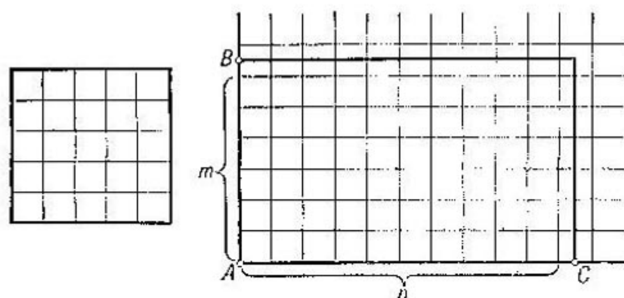


Fig. 130

suma de las áreas de los cuadrados pequeños. Puesto que el área del cuadrado grande es igual a la unidad y que el número de cuadrados pequeños es igual a N^2, el área del cuadrado pequeño es igual a $\frac{1}{N^2}$. Indiquemos por q el lado del cuadrado pequeño. Entonces, $q = \frac{1}{N}$ y, por consiguiente, el área del cuadrado pequeño es $\frac{1}{N^2} = q^2$.

Construyamos en las semirrectas AB y AC segmentos iguales a q, $2q$, $3q$, . . . y tracemos por sus extremos rectas paralelas a los lados del rectángulo. Obtendremos una red de cuadrados de lado q que cubren el rectángulo. Determinemos el número de cuadrados contenidos en el rectángulo y el número de cuadrados que contienen el rectángulo.

Sean a y b los lados del rectángulo. Indiquemos mediante m el entero de la división de a por q y mediante n el entero de la división de b por q. Entonces, el número de cuadrados contenidos en el rectángulo será mn, mientras que el número

de cuadrados que contienen el rectángulo no será mayor que $(m + 1)(n + 1)$. De aquí resulta que el área S del rectángulo está comprendida entre mnq^2 y $(m + 1)(n + 1)q^2$, o sea, que

$$mnq^2 \leqslant S < (m + 1)(n + 1)q^2.$$

Demostremos ahora que el producto ab está comprendido entre estos mismos números. Efectivamente, se tiene $mq \leqslant \leqslant a < (m + 1)q$ y $nq \leqslant b < (n + 1)q$. Por eso

$$mnq^2 \leqslant ab < (m + 1)(n + 1)q^2.$$

Puesto que ambos números, S y ab, están comprendidos entre los números mnq^2 y $(m + 1)(n + 1)q^2$, difieren a lo sumo en $(m + 1)(n + 1)q^2 - mnq^2$, o sea, difieren a lo sumo en $mq^2 + nq^2 + q^2$. Como $mq \leqslant a$ y $nq \leqslant b$, de aquí se deduce que S y ab difieren no más que en $aq + bq + q^2$. Tomando el número N suficientemente grande, el número $aq + bq + q^2$, igual a $\frac{a}{N} + \frac{b}{N} + \frac{1}{N^2}$, será tan pequeño como se quiera. Resulta que la diferencia entre los números S y ab es todo lo pequeña que se quiera. Pero esto puede darse sólo si son iguales.

Por consiguiente, *el área del rectángulo de lados a y b es*

$$S = ab.$$

Aquí a y b se miden con el lado del cuadrado que se ha tomado como unidad de medición del área.

Areas de las figuras elementales. Determinemos el área del paralelogramo. Sea $ABCD$ un paralelogramo (fig. 131). Si no es un rectángulo, uno de sus ángulos A o B es agudo. Supongamos, para puntualizar, que es agudo el ángulo A como representa la figura. Tracemos desde el vértice A la perpendicular AE y la recta CD. El área del trapecio $ABCE$ es igual a la suma de las áreas del paralelogramo $ABCD$ y del triángulo ADE.

Fig. 131

Tracemos desde el vértice B la perpendicular BF a la recta CD. El área del trapecio $ABCE$ es entonces igual a la suma de las áreas del rectángulo $ABFE$ y del triángulo BCF. Los triángulos rectángulos ADE y BCF son iguales y, por consiguiente, tienen áreas iguales. De aquí resulta

que el área del paralelogramo $ABCD$ es igual a la del rectángulo $ABFE$, o sea, es igual a $AB \cdot BF$. El segmento BF se denomina *altura* del paralelogramo correspondiente a los lados AB y CD.

Por consiguiente, *el área del paralelogramo es igual al producto de su lado por la altura correspondiente.*

Determinemos el área del triángulo. Sea ABC un triángulo (fig. 132). Complementemos este triángulo hasta obtener el paralelogramo $ABCD$ como se indica en la figura. El área del paralelogramo es igual a la suma de las áreas

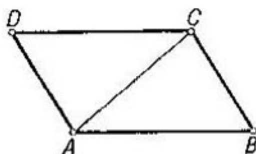


Fig 132

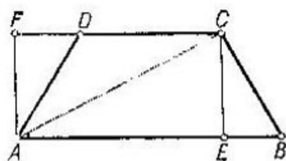


Fig. 133

de los triángulos ABC y CDA. Puesto que estos triángulos resultan iguales, el área del paralelogramo será igual al duplo del área del triángulo ABC. La altura del paralelogramo correspondiente a su lado AB es igual a la altura del triángulo ABC relativa al lado AB.

De aquí se desprende que *el área del triángulo es igual a la mitad del producto de su lado por la altura relativa.*

Determinemos el área del trapecio. Sea $ABCD$ un trapecio (fig. 133). La diagonal AC del trapecio lo divide en dos triángulos ABC y CDA. Por lo tanto, el área del trapecio es igual a la suma de las áreas de estos triángulos. El área del triángulo ABC es igual a $\frac{1}{2} AB \cdot CE$ y el área del triángulo ACD es igual a $\frac{1}{2} DC \cdot AF$. Las alturas CE y AF de estos triángulos son iguales a la distancia entre las rectas paralelas AB y CD. Esta distancia se denomina *altura* del trapecio.

Por consiguiente, *el área del trapecio es igual al producto de la semisuma de sus bases por la altura.*

Independencia entre el área de una figura simple y el modo de dividirla en triángulos. El área de una figura simple se determina sumando las áreas de los triángulos que la componen. Pero existen diversos modos de dividir una figura

simple en triángulos. Por ello, surge la siguiente pregunta: ¿depende el área de la figura del modo de dividirla en triángulos? Demostremos que *el área de toda figura simple no depende del modo de dividirla en triángulos.*

Demostremos, ante todo, que el área del triángulo no depende del lado ni de la altura correspondiente tomados para calcular el área. Sea ABC un triángulo (fig. 134). Tracemos sus alturas CC_1 y BB_1. Los triángulos rectángulos AC_1C y AB_1B son semejantes, pues tienen el ángulo A común. De aquí se deduce que

$$\frac{AC}{AB}=\frac{CC_1}{BB_1} \text{ y } AC\cdot BB_1=AB\cdot CC_1.$$

Por consiguiente, al calcular el área del triángulo ABC se obtiene el mismo resultado tanto tomando el lado AC y la altura BB_1 como tomando el lado AB y la altura CC_1.

Demostremos ahora que, al dividir un triángulo en triángulos menores, su área es igual a la suma de las áreas de los triángulos resultantes cualquiera que sea el modo de dividirlo. Consideremos primero el modo de división representado en la fig. 135. El triángulo ABC ha sido dividido en triángulos CAD_1, CD_1D_2, CD_2D_3, . . . Todos estos

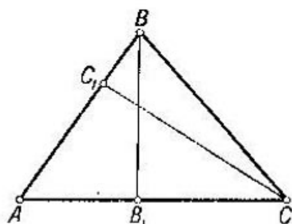


Fig. 134

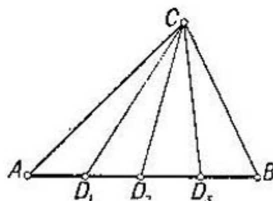


Fig. 135

triángulos tienen la misma altura h trazada desde el vértice común C. Es al mismo tiempo la altura del triángulo ABC.

La suma de las áreas de los triángulos, producto de la división, es

$$\frac{AD_1\cdot h}{2}+\frac{D_1D_2\cdot h}{2}+\frac{D_2D_3\cdot h}{2}+\ldots=\frac{(AD_1+D_1D_2+D_2D_3+\ldots)\cdot h}{2}.$$

Puesto que $AD_1+D_1D_2+D_2D_3+\ldots=AB$, la suma de las áreas de los triángulos de nuestra partición es igual a $\frac{AB\cdot h}{2}$, o sea, es igual al área del triángulo ABC.

Consideremos ahora una partición cualquiera del triángulo ABC en triángulos pequeños. Supongamos que dos cualesquiera triángulos de esta partición no tienen puntos comunes, tienen un vértice común o tienen un lado común. Semejante partición está representada en la fig. 136.

En la fig. 137 se muestra un triángulo PQR de esta partición. El área del triángulo PQR se puede representar como la suma algebraica de las áreas de tres triángulos APQ, AQR y ARP. Estos triángulos se obtienen del triángulo PQR tomando el vértice A en lugar de uno de sus

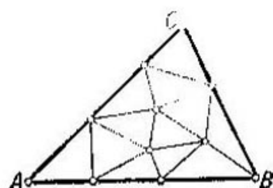


Fig. 136

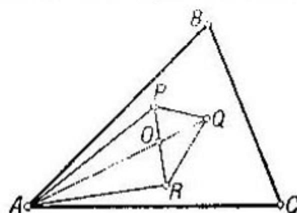


Fig. 137

vértices. El signo del área de los triángulos en esta suma se determina por la regla siguiente. Si el vértice sustituido por el vértice A está al mismo lado que el vértice A respecto a la recta que une los otros dos vértices, el área del triángulo lleva el signo «+»; en el caso contrario se toma el signo «—». Si al sustituir el vértice A, tres puntos aparecen en una recta, el sumando correspondiente se omite, es decir, su área se considera igual a cero.

Analicemos, por ejemplo, la posición del triángulo PQR representada en la fig. 137. Según lo demostrado,

$$S(PQR) = S(PQO) + S(QRO),$$
$$S(APQ) = S(APO) + S(PQO),$$
$$S(ARQ) = S(ARO) + S(QRO),$$
$$S(APR) = S(APO) + S(ARO).$$

De donde vemos que

$$S(PQR) = S(APQ) + S(ARQ) - S(ARP).$$

Hemos comprobado la validez de nuestra afirmación —respecto a la posibilidad de representar el área del triángulo PQR como una suma algebraica de las áreas de los triángu-

los APQ, AQR y ARP— para una posición concreta del triángulo PQR. Podríamos haber considerado los demás casos y comprobar la certeza de nuestra afirmación.

Representando el área de cada uno de los triángulos de la partición como la suma algebraica de las áreas de triángulos de vértice A, sumemos las áreas de todos los triángulos de la partición. Obtendremos así la suma de las áreas de triángulos AXY, donde XY es un lado de un triángulo de la partición. Si el segmento XY está en el interior del triángulo ABC, el área del triángulo AXY aparecerá en nuestra suma dos veces, pues XY será un lado de dos triángulos de la partición. Como quiera que estos triángulos se encuentran a distintos lados de la recta XY, el área del triángulo AXY aparecerá una vez con el signo «+» y la segunda vez con el signo «—». Por consiguiente, estos sumandos se reducirán.

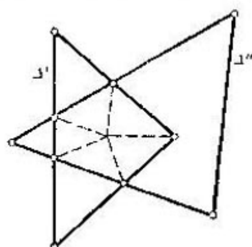


Fig. 138

Si el segmento XY se halla en el lado BC del triángulo ABC, el área del triángulo AXY aparecerá en nuestra suma sólo una vez y, además, llevando el signo «+». Finalmente, si el lado XY se halla en AB o en AC, el área de AXY será simplemente igual a cero. En resumen, la suma de las áreas de los triángulos de nuestra partición será igual a la suma de las áreas de aquellos triángulos AXY cuyos lados XY se encuentran en el lado BC del triángulo ABC. Pero hemos demostrado con anterioridad que esta suma es igual al área del triángulo ABC. Por consiguiente, el área del triángulo ABC es igual a la suma de las áreas de los triángulos de cualquier partición.

Supongamos ahora que una figura simple F ha sido dividida primero en triángulos Δ_1', Δ_2', Δ_3', . . . y después en triángulos Δ_1'', Δ_2'', Δ_3'', . . . Demostremos que las sumas de las áreas de los triángulos de ambas particiones son iguales.

Los triángulos de ambas particiones, considerados conjuntamente, realizan una partición de la figura F en polígonos convexos; a saber: en triángulos, cuadriláteros, pentágonos y hexágonos. Cada uno de estos polígonos es la parte común de un triángulo de la primera partición y de un triángulo de la segunda partición. En la figura 138 se muestra

un pentágono de este tipo. Dividamos estos polígonos en triángulos $\triangle_1'''$, $\triangle_2'''$, $\triangle_3'''$, . . . haciendo que dos triángulos cualesquiera de esta partición no tengan puntos comunes, tengan un vértice común o tengan un lado común.

Según hemos demostrado, el área de todo triángulo $\triangle_k'$ de la primera partición de la figura F es igual a la suma de las áreas de los triángulos $\triangle_k'''$ que lo componen. Igualmente, el área de todo triángulo $\triangle_k''$ de la segunda partición es suma de áreas de triángulos $\triangle_k'''$. Por esto, la suma de las áreas de los triángulos tanto de la primera como de la segunda partición de la figura F será igual a la suma de las áreas de los triángulos $\triangle_k'''$. Es decir, en ambas particiones la suma de las áreas de los triángulos es la misma, o sea, el área de la figura F no depende del modo de dividirla en triángulos.

Areas de las figuras semejantes. Sean F_1 y F_2 dos figuras simples semejantes. Veamos cuál es la razón entre las áreas de estas figuras. Puesto que las figuras son semejantes, existe una transformación de semejanza que aplica la figura F_1 en F_2.

Dividamos la figura F_1 en los triángulos $\triangle_1'$, $\triangle_2'$, $\triangle_3'$, . . . La transformación de semejanza que aplica F_1 en F_2 transforma estos triángulos en los triángulos $\triangle_1''$, $\triangle_2''$, $\triangle_3''$, . . . que constituyen una partición de la figura F_2. El área de la figura F_1 es igual a la suma de las áreas de los triángulos $\triangle_1'$, $\triangle_2'$, $\triangle_3'$, . . . y el área de la figura F_2 es igual a la suma de las áreas de los triángulos $\triangle_1''$, $\triangle_2''$, $\triangle_3''$, . . .

Si el coeficiente de semejanza es k, las dimensiones del triángulo $\triangle_n''$ son k veces mayores que las dimensiones correspondientes del triángulo $\triangle_n'$. En particular, los lados y las alturas del triángulo $\triangle_n''$ son k veces mayores que los lados y las alturas correspondientes del triángulo $\triangle_n'$. De aquí resulta que $S(\triangle_n'') = k^2 S(\triangle_n')$. Sumando estas igualdades miembro por miembro, obtenemos

$$S(F_2) = k^2 S(F_1).$$

El coeficiente de semejanza k es igual a la razón de las dimensiones lineales correspondientes de las figuras F_2 y F_1, o sea, $k = \frac{l_2}{l_1}$. Por esto

$$S(F_2) = \frac{l_2^2}{l_1^2} S(F_1) \quad \text{o} \quad \frac{S(F_2)}{S(F_1)} = \frac{l_2^2}{l_1^2}.$$

es decir, *la razón de las áreas de las figuras semejantes es igual a la razón de los cuadrados de sus dimensiones lineales correspondientes.*

Preguntas de repaso y ejercicios

1. Enúnciense las propiedades del área.
2. Demuéstrese que el área del rectángulo es igual a ab, donde a y b son los lados del rectángulo.
3. Demuéstrese que el área del paralelogramo es igual al producto de su lado por la altura correspondiente.
4. Demuéstrese que el área del triángulo es igual a la mitad del producto de su lado por la altura trazada desde el vértice opuesto.
5. Demuéstrese que el área del triángulo ABC es

$$\frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \operatorname{sen} A.$$

6. Demuéstrese que el área del trapecio es igual al producto de la semisuma de sus bases por la altura del trapecio.
7. Demuéstrese que el área del polígono convexo circunscrito es igual al producto del semiperímetro por el radio de la circunferencia inscrita.
8. Demuéstrese que para toda partición del triángulo en triángulos pequeños la suma de las áreas de los triángulos de esta partición es igual al área del triángulo.
9. Demuéstrese que el área de una figura simple no depende del modo de dividirla en triángulos al calcular el área.
10. ¿Cuál es la razón de las áreas de figuras semejantes?

§ 17. LONGITUD DE LA CIRCUNFERENCIA. AREA DEL CÍRCULO

Longitud de la circunferencia. Sea P un polígono convexo inscrito en una circunferencia y sean A y B dos vértices consecutivos del mismo (fig. 139). Tomemos un punto C en el arco $\overset{\frown}{AB}$ de la circunferencia e indiquemos por P_1 el polígono cuyos vértices son los vértices del polígono P más el punto C. El paso del polígono P al polígono P_1 está relacionado con la sustitución del lado AB por los lados AC y CB. Puesto que $AB < AC + CB$, el perímetro del polígono P_1 es mayor que el perímetro del polígono P.

Añadiendo al polígono vértices nuevos, aumentaremos su perímetro. Sin embargo, este aumento no es ilimitado. Es más, si tomamos un polígono circunscrito, los perímetros de todos los polígonos inscritos serán menores que el perímetro de este polígono circunscrito. En particular, el perí-

metro del cuadrado circunscrito a la circunferencia es igual a $8R$. Por esto, el perímetro de cualquier polígono inscrito no es mayor que $8R$.

Se llama *longitud de la circunferencia* el menor de los números mayores que el perímetro de cualquier polígono inscrito en ella.

Cualquiera que sea el número positivo a, se puede inscribir en la circunferencia un polígono convexo cuyo perímetro difiere de la longitud de la circunferencia en menos que a. Efectivamente, supongamos que esta afirmación no es válida. Entonces el perímetro de cualquier polígono inscrito en la circunferencia no es mayor que $l - a$. Por consiguiente, el número l no es el menor de los números mayores que el perímetro de cualquier polígono inscrito. El número $l - \frac{a}{2}$ es menor que l y, a la vez, mayor que el perímetro de cualquier polígono inscrito. Hemos llegado a una contradicción. Queda demostrada la afirmación.

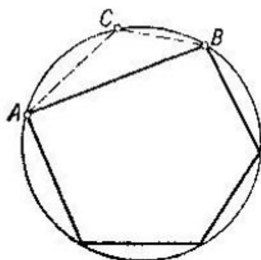


Fig. 139

TEOREMA 17.1. *La razón de las longitudes de dos circunferencias es igual a la razón de sus radios o sus diámetros.*

DEMOSTRACION. Sean R_1 y R_2 los radios de las circunferencias y sean l_1 y l_2 sus longitudes. El teorema afirma que $\frac{R_1}{R_2} = \frac{l_1}{l_2}$. Supongamos que la afirmación no es válida. Entonces $\frac{R_1}{R_2} < \frac{l_1}{l_2}$ o $\frac{R_2}{R_1} < \frac{l_2}{l_1}$. Supongamos, para puntualizar, que $\frac{R_1}{R_2} < \frac{l_1}{l_2}$. Indiquemos por k la razón $\frac{R_1}{R_2}$. Entonces $\frac{l_1}{l_1} > k$ y, por consiguiente, $l_1 > kl_2$.

Inscribamos en la primera circunferencia un polígono Q_1 de manera que su perímetro p_1 difiera de la longitud de la circunferencia en menos que $l_1 - l_2k$, o sea, que se tenga $l_1 - p_1 < l_1 - l_2k$. Entonces $p_1 > l_2k$.

Inscribamos en la segunda circunferencia el polígono Q_2 semejante a Q_1.

Sea p_2 su perímetro. La razón de los perímetros de los polígonos Q_1 y Q_2 es igual a la razón de los radios de las circunferencias, esto es, $p_1 = kp_2$. Puesto que $p_1 > kl_2$

y que $p_1 = kp_2$, resulta que $p_2 > l_2$. Pero esto contradice la definición del número l_2 que debe ser mayor que el perímetro de cualquier polígono inscrito en la segunda circunferencia. Por lo tanto, la razón de las longitudes de las circunferencias es igual a la razón de sus radios o diámetros:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{d_1}{d_2} .$$

Queda demostrado el teorema.

Del teorema 17.1. se deduce que

$$\frac{l_1}{d_1} = \frac{l_2}{d_2} ,$$

o sea, que *la razón entre la longitud de la circunferencia y su diámetro no depende de qué circunferencia se ha tomado.*



Fig. 140

Esta razón se designa por la letra griega π (se lee «pi»). El número π es irracional. Su valor aproximado es

$$\pi \approx 3{,}1416.$$

Por consiguiente, *la longitud de la circunferencia se determina según la fórmula*

$$l = 2\pi R.$$

Longitud del arco de circunferencia. Medida radial del ángulo. Llamaremos *longitud del arco* de circunferencia el menor de los números mayores que la longitud de cualquier quebrada convexa inscrita en este arco. En la fig. 140 se puede ver el arco $\widehat{AB}$ de circunferencia y una quebrada convexa inscrita en éste. Para abreviar, en lugar de arco de circunferencia a menudo se dice simplemente arco.

Idénticamente al caso de la circunferencia, se demuestra que cualquiera que sea el número positivo a se puede inscribir en el arco de circunferencia una quebrada convexa cuya longitud difiera de la longitud del arco en menos que a.

TEOREMA 17.2. *La longitud l del arco de circunferencia se determina según la fórmula*

$$l=\frac{\pi R}{180}\alpha,$$

donde α es la medida en grados del ángulo central correspondiente.

DEMOSTRACION. Demostremos, ante todo, que si el punto C divide el arco $\overset{\frown}{AB}$ en los arcos $\overset{\frown}{AC}$ y $\overset{\frown}{CB}$, la longitud del arco $\overset{\frown}{AB}$ es igual a la suma de las longitudes de los arcos $\overset{\frown}{AC}$ y $\overset{\frown}{CB}$.

Tomemos un número pequeño positivo a. Inscribamos en los arcos $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{AC}$ y $\overset{\frown}{CB}$ las quebradas γ, γ_1 y γ_2 de modo que sus longitudes difieran de las longitudes de los arcos en menos que a. Complementemos los vértices de la quebrada γ con los vértices de las quebradas γ_1 y γ_2 y los vértices de las quebradas γ_1 y γ_2 con los vértices de la quebrada γ. Obtendremos así unas quebradas γ', γ_1' y γ_2' inscritas en los arcos $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{AC}$ y $\overset{\frown}{CB}$. Puesto que al agregar vértices nuevos a la quebrada su longitud aumenta, las longitudes de las quebradas γ', γ_1' y γ_2' difieren de las longitudes de los arcos correspondientes también en menos que a.

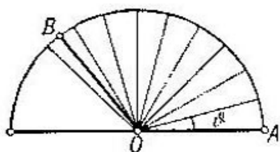


Fig. 141

Indiquemos por l, l_1 y l_2 las longitudes de los arcos y por s, s_1 y s_2 las longitudes de las quebradas. Las quebradas γ_1' y γ_2' son las partes en que el punto C divide la quebrada γ'. Por esto, la longitud de la quebrada γ' es igual a la suma de las longitudes de las quebradas γ_1' y γ_2', o sea, $s=s_1+s_2$. Puesto que $l-s<a$, $l_1-s_1<a$, $l_2-s_2<a$ y $s=s_1+s_2$, resulta que l difiere de l_1+l_2 en $2a$ como máximo. Como quiera que los números l y l_1+l_2 están perfectamente determinados y el número a se puede tomar tan pequeño como se quiera, esto es posible sólo si $l=l_1+l_2$. Queda demostrada la afirmación.

Probemos ahora que la longitud del arco $\overset{\frown}{AB}$ (fig. 141) se determina según la fórmula

$$l=\frac{\pi R}{180}\alpha,$$

donde α es la medida en grados del ángulo central correspondiente.

Sea N un número entero grande y sea ϑ el ángulo de $\frac{180^\circ}{N}$. Construyamos a partir de la semirrecta OA los ángulos iguales a ϑ, 2ϑ, 3ϑ, ... Sea n el entero de la división de α por ϑ, es decir,

$$n\vartheta \leqslant \alpha < (n+1)\,\vartheta$$

o

$$\frac{n \cdot 180}{N} \leqslant \alpha < \frac{(n+1)\,180}{N}.$$

De aquí resulta que

$$\frac{n}{N}\pi R \leqslant \frac{\pi R}{180}\alpha < \frac{n+1}{N}\pi R.$$

Puesto que la longitud del arco de circunferencia es igual a la suma de las longitudes de sus partes, la longitud del arco correspondiente al ángulo ϑ es igual a $\frac{\pi R}{N}$. El arco $\widehat{AB}$ no es menor que la suma de n arcos iguales a $\frac{\pi R}{N}$ pero es menor que la suma de $n+1$ arcos idénticos, o sea,

$$\frac{n}{N}\pi R \leqslant \widehat{AB} < \frac{n+1}{N}\pi R.$$

Vemos que ambos números —el número $\frac{\pi R \alpha}{180}$ y la longitud del arco $\widehat{AB}$— están comprendidos entre los números $\frac{\pi R n}{N}$ y $\frac{\pi R\,(N+1)}{N}$. De aquí se deduce que la longitud del arco $\widehat{AB}$ difiere del número $\frac{\pi R \alpha}{180}$ a lo sumo en

$$\frac{\pi R}{N}(n+1) - \frac{\pi R}{N}n,$$

o sea, en $\frac{\pi R}{N}$ todo lo más. Puesto que N se puede tomar tan grande como se quiera, de aquí se desprende que la longitud del arco $\widehat{AB}$ es igual a $\frac{\pi R \alpha}{180}$. Queda demostrado el teorema.

Se denomina *medida radial* del ángulo la razón entre la longitud del arco correspondiente y el radio de la circunferencia. De la fórmula obtenida para la longitud del arco

de circunferencia resulta que

$$\frac{l}{R}=\frac{\pi}{180}\alpha,$$

o sea, que *la medida radial del ángulo se obtiene multiplicando su medida en grados por* $\frac{\pi}{180}$. En particular, la medida radial del ángulo de 180° es igual a π y la medida radial del ángulo recto es $\frac{\pi}{2}$.

La unidad de la medida radial de los ángulos es el *radián*. El ángulo de un radián es el ángulo cuyo arco es igual al radio. La medida en grados del ángulo de un radián es igual a $\frac{180°}{\pi}\approx 57{,}3°$.

Area del círculo y de sus partes. Se denomina *círculo* de centro O y de radio R la figura formada por todos los puntos del plano que se encuentran a una distancia no mayor que R del punto O (fig. 142). La circunferencia de radio R y de centro O se denomina *circunferencia* del círculo.

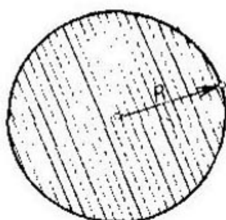


Fig. 142

El área del círculo es el menor de los números mayores que el área de cualquier polígono convexo inscrito en la circunferencia del círculo.

TEOREMA 17.3. *El área del círculo es igual a la mitad del producto de la longitud de la circunferencia del círculo por el radio, o sea,*

$$S=\pi R^2.$$

DEMOSTRACION. Tomemos un número positivo pequeño a. Inscribamos en la circunferencia del círculo un polígono convexo P tal que sus lados sean menores que a (cm), que su perímetro difiera de la longitud de la circunferencia en menos que a (cm) y que el área del círculo difiera del área del polígono en menos que aR (cm²). Con este fin, construyamos tres polígonos P_1, P_2 y P_3 de modo que P_1 cumpla la primera condición, P_2 la segunda y P_3 la tercera. Ahora, agregando al polígono P_1 los vértices de los polígonos P_2 y P_3, obtendremos el polígono P que cumple las tres condiciones.

El área del polígono P se obtiene sumando las áreas de todos los triángulos que tienen un vértice común en el centro

del círculo y cuyos lados opuestos a este vértice son los lados del polígono P (fig. 143). Consideremos el área de uno de estos triángulos OAB. Tenemos

$$S(OAB) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot OC.$$

Puesto que $OA > OC > OA - AC$, se tiene

$$\frac{1}{2} AB(R-a) < S(OAB) < \frac{1}{2} AB \cdot R.$$

Sumando las áreas de todos los triángulos, encontramos

$$\frac{1}{2} p(R-a) < S(P) < \frac{1}{2} pR,$$

donde p es el perímetro del polígono P y $S(P)$ es su área.

Introduciendo en el último miembro de esta desigualdad la longitud l de la circunferencia en lugar del perímetro

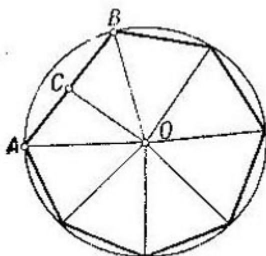


Fig. 143

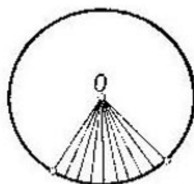


Fig. 144

p y en el primer miembro la magnitud $l - a$ en lugar del perímetro, con mayor razón podremos escribir que

$$\frac{1}{2}(l-a)(R-a) < S(P) < \frac{1}{2} lR,$$

o sea,

$$\frac{1}{2} lR - \frac{1}{2}(aR + al - a^2) < S(P) < \frac{1}{2} lR.$$

De esta desigualdad resulta que el área $S(P)$ del poligóno difiere de $\frac{lR}{2}$ en menos que $\frac{aR+al-a^2}{2}$. Ya que, por la construcción, esta área difiere del área del círculo en menos que aR, se deduce que el área del círculo difiere de $\frac{lR}{2}$ en menos que $aR + \frac{aR+al-a^2}{2}$, o sea, difiere tan

poco como se quiera si a es suficientemente pequeño. Pero esto puede suceder sólo si el área del círculo es igual a $\frac{lR}{2}$.

Queda demostrado el teorema.

Se llama *sector de círculo* la parte del círculo perteneciente al interior del ángulo central correspondiente (fig. 144).

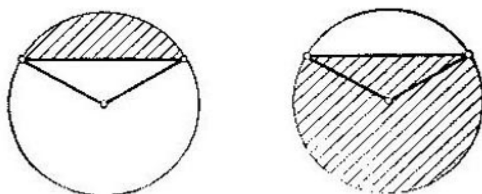


Fig. 145

El área del sector de círculo se determina según la fórmula

$$S = \pi R^2 \frac{\alpha}{360},$$

donde R es el radio del círculo y α es la medida en grados del ángulo central correspondiente. Esta fórmula se demuestra igual que la fórmula de la longitud del arco de circunferencia.

Se denomina *segmento de círculo* la parte común del círculo y de un semiplano (fig. 145). El área del segmento, que no sea un semicírculo, se determina mediante la fórmula

$$S = \pi R^2 \frac{\alpha}{360} \pm S_{\Delta},$$

donde S_{Δ} es el área del triángulo de vértices en el centro del círculo y en los extremos de los radios que limitan el sector correspondiente. El signo «—» ha de tomarse si $\alpha < 180°$ y el signo «+» si $\alpha > 180°$.

Preguntas de repaso y ejercicios

1. ¿Qué es longitud de la circunferencia?

2. Demuéstrese que cualquiera que sea el número positivo a, existe un polígono inscrito cuyo perímetro difiere de la longitud de la circunferencia en menos que a.

3. ¿Qué es longitud del arco de circunferencia?

4. Demuéstrese la fórmula de la longitud de la circunferencia: $l = 2\pi R$.

5. Demuéstrese que si el punto C divide el arco $\overset{\frown}{AB}$ de la circunferencia en los arcos $\overset{\frown}{AC}$ y $\overset{\frown}{CB}$, la longitud del arco $\overset{\frown}{AB}$ es igual a la suma de las longitudes de los arcos $\overset{\frown}{AC}$ y $\overset{\frown}{CB}$.

6. Dedúzcase la fórmula de la longitud del arco de circunferencia.

7. ¿Qué es medida radial del ángulo? ¿Cuál es la medida radial de los ángulos de $30°$ y de $45°$?

8. Dese la definición del área del círculo.

9. Demuéstrese que cualquiera que sea el número positivo a, existe un polígono convexo inscrito cuya área difiere del área del círculo en menos que a.

10. Demuéstrese que el área S del círculo se determina mediante la fórmula $S = \pi R^2$, donde R es el radio del círculo.

11. ¿Qué es sector de círculo? ¿Cuál es la fórmula del área del sector de círculo?

12. ¿Qué es segmento de círculo? ¿Cuál es la fórmula del área del sector de círculo?

Parte segunda

ESTEREOMETRIA

§ 18. AXIOMAS DE LA ESTEREOMETRÍA Y ALGUNOS COROLARIOS

La *Estereometría* es la parte de la Geometría en la que se estudian las figuras en el espacio. En la Estereometría, igual que en la Planimetría, las propiedades de las figuras geométricas se establecen mediante la demostración de teoremas correspondientes partiendo de las propiedades de las figuras geométricas elementales expresadas por los axiomas.

En el espacio las figuras elementales son el *punto*, la *recta* y el *plano*. La introducción de una nueva ente geométrica, el plano, hace ampliar el sistema de axiomas. A saber, introducimos el grupo de axiomas E que expresa las propiedades fundamentales de los planos en el espacio. Este grupo consta de los tres axiomas siguientes.

E_1. *Cualquiera que sea el plano existen puntos que pertenecen a este plano y puntos que no le pertenecen.*

E_2. *Si dos planos diferentes tienen un punto común, se cortan según una recta.*

Este axioma afirma que si dos planos distintos α y β tienen un punto común C, existe una recta c que pertenece a cada uno de estos planos. Además, todo punto C que pertenezca a ambos planos ha de pertenecer a la recta c.

E_3. *Si dos rectas distintas tienen un punto común, se puede trazar por éstas un plano y sólo uno.*

Esto significa que si dos rectas distintas a y b tienen un punto común C, existe un plano γ que contiene las rectas a y b. El plano con esta propiedad es único.

Por consiguiente, el sistema de axiomas de la Estereometría consta de los axiomas de la Planimetría más el grupo de axiomas E. Para facilitar la exposición, recordemos los dos primeros grupos de axiomas de la Planimetría.

I_1. *Cualquiera que sea la recta, existen puntos que pertenecen a esta recta y puntos que no le pertenecen.*

I_2. *Cualesquiera que sean dos puntos, existe una recta que pasa por estos puntos siendo dicha recta única.*

II_1. *De tres puntos de una recta uno, y sólo uno, se halla entre los otros dos.*

II$_2$. *Un punto perteneciente a una recta la divide en dos semirrectas. Los puntos de una misma semirrecta no están separados por el punto de división. Los puntos de diferentes semirrectas están separados por este punto.*

II$_3$. *Toda recta perteneciente a un plano lo divide en dos semiplanos. Si los extremos de un segmento pertenecen a un mismo semiplano, el segmento no corta la recta. Si los extremos del segmento pertenecen a diferentes semiplanos, el segmento corta la recta.*

Algunos corolarios de los axiomas de la Estereometría. TEOREMA 18.1. *Por una recta y un punto que no le pertenece se puede trazar un plano, y sólo uno.*

DEMOSTRACION. Sea a una recta y B un punto que no le pertenece (fig. 146). Tomemos en la recta a un punto cualquiera A. Este punto existe por el axioma I$_1$. Tracemos

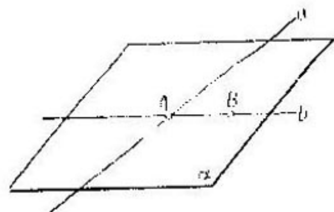


Fig. 146

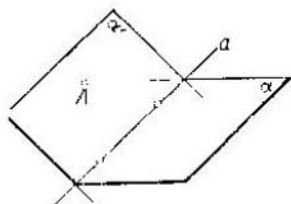


Fig. 147

por los puntos A y B la recta b (axioma I$_2$). Las rectas a y b son distintas, pues el punto B de la recta b no pertenece a la recta a. El punto A es común para las rectas a y b. Tracemos por las rectas a y b el plano α (axioma E$_3$). Este plano pasa por la recta a y por el punto B.

Demostremos ahora que el plano α que pasa por la recta a y por el punto B es único. Supongamos que existe otro plano α' distinto de α que pasa por la recta a y por el punto B. Por el axioma E$_2$, los planos α y α' se cortan según una recta, pues son distintos. Por consiguiente, cualesquiera tres puntos comunes de los planos α y α' se hallan en esta recta. Pero el punto B y dos puntos cualesquiera de la recta a no se encuentran indiscutiblemente en una recta. Hemos llegado a una contradicción. Queda demostrado completamente el teorema.

TEOREMA 18.2. *Si dos puntos de la recta pertenecen a un mismo plano, toda la recta pertenece a este plano.*

DEMOSTRACION (fig. 147). Sean a la recta y α el plano. Según el axioma I_1, existe un punto A que no está en la recta a. Tracemos el plano α' que pasa por la recta a y por el punto A. Si el plano α' coincide con α, el plano α contiene la recta a que es lo que afirma el teorema. Si el plano α' es distinto de α, estos planos se cortan según la recta a' que contiene los dos puntos de la recta a. En virtud del axioma I_2, las rectas a' y a coinciden y, por consiguiente, la recta a se encuentra en el plano α. Queda demostrado el teorema.

Del teorema 18.2 se deduce que *el plano y la recta que no está en él no se cortan o se cortan en un punto.*

TEOREMA 18.3. *Por tres puntos que no se hallan en una recta se puede trazar un plano, y sólo uno.*

DEMOSTRACION (fig. 148). Sean A, B y C tres puntos que no se hallan en una recta. Tracemos las rectas AB y AC. Estas rectas son distintas ya que los puntos A, B y C no están en una recta. Según el axioma E_3, por las rectas AB y AC se puede trazar un plano. Este plano contiene los puntos A, B y C.

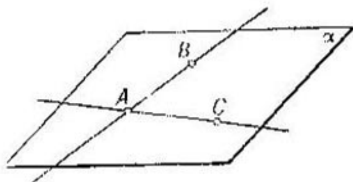


Fig. 148

Demostremos que el plano α que pasa por los puntos A, B y C es único. Efectivamente, en virtud del teorema 18.2, el plano que pasa por los puntos A, B y C contiene las rectas AB y AC. Pero, según el axioma E_3, este plano es único. Queda demostrado el teorema.

División del espacio en dos semiespacios por un plano. TEOREMA 18.4. *Todo plano divide el espacio en dos semiespacios. Si los puntos X e Y pertenecen a un mismo semiespacio, el segmento XY no corta el plano. En cambio, si los puntos X e Y pertenecen a distintos semiespacios, el segmento XY corta el plano.*

DEMOSTRACION. Sea α un plano. Tomemos un punto A que no se halla en el plano α. Este punto existe por el axioma E_1. Dividamos todos los puntos del espacio que no pertenecen al plano α en dos clases a tenor con el criterio siguiente. Incluiremos el punto X en la primera clase si el segmento AX no corta el plano α. Incluiremos el punto X en la segunda clase si el segmento AX corta el plano α. Así, todo punto

X del espacio que no pertenezca al plano α será incluido en una clase. Mostremos que esta división del espacio posee las propiedades indicadas en el teorema.

Supongamos que los puntos X e Y pertenecen a la primera clase. Tracemos por los puntos A, X e Y el plano α'. Si el plano α' no corta el plano α, el segmento XY —que está en el plano α'— tampoco lo corta. Supongamos que el plano α' corta el plano α (fig. 149). Puesto que los planos son distintos, la intersección de los mismos es una recta a. La recta a divide el plano α' en dos semiplanos. Los puntos X e Y pertenecen a un mismo semiplano; concretamente, al que contiene el punto A. Por esto, el segmento XY no corta la recta a ni, por consiguiente, el plano α.

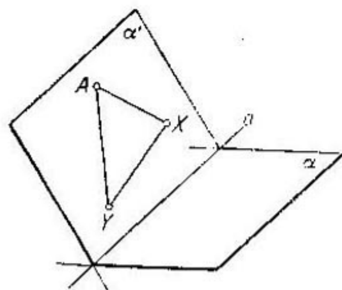


Fig. 149

Si los puntos X e Y pertenecen a la segunda clase, el plano α' corta indudablemente el plano α ya que el segmento AX corta α. Los puntos X e Y pertenecen a uno de los semiplanos en que la recta a divide el plano α. Es decir, el segmento XY no corta la recta a ni, por consiguiente, el plano α.

Finalmente, si el punto X pertenece a una clase y el punto Y a otra, el plano α' corta α y los puntos X e Y se encuentran en distintos semiplanos del plano α' respecto a la recta a. Por eso, el segmento XY corta la recta a y, por ende, el plano α. Queda demostrado el teorema.

Observación al axioma I_1. Concluyendo este parágrafo, haremos una observación relacionada con el axioma I_1. En tanto que axioma de la Estereometría, este axioma adquiera un sentido distinto del que tiene en la Planimetría. En la Planimetría afirma la existencia de puntos fuera de la recta *en el plano* al que esta recta pertenece. Precisamente en este sentido hemos empleado dicho axioma al construir la Geometría del plano. Ahora el axioma I_1 afirma la existencia general de puntos que no se hallan en la recta. No implica directamente la existencia de puntos fuera de la recta en el plano al que ésta pertenece. Esto exige una demostración especial. Demos esta demostración.

Sea α un plano y sea a una recta en este plano. Demostremos la existencia en el plano α de puntos que no se hallan

en la recta a. Tomemos un punto A de la recta a y un punto A' fuera del plano α. Tracemos el plano α' por la recta a y por el punto A' (fig. 150). Tomemos un punto B fuera del plano α' y tracemos el plano β que pasa por la recta AA'

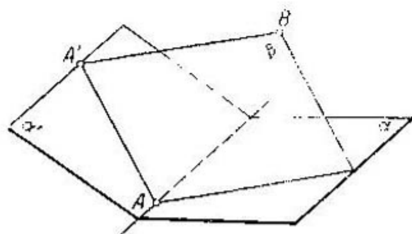


Fig. 150

y por el punto B. Los planos α y β se cortan según una recta que pasa por el punto A. Los puntos de esta recta distintos de A están en el plano α y fuera de la recta a que es lo que se quería demostrar.

Ejercicios

1. Sean a una recta y A un punto fuera de ella. Demuéstrese que todas las rectas que pasan por el punto A y que cortan la recta a están en un mismo plano.[1]

2. Sean a y b dos rectas que no se hallan en un mismo plano y C un punto que no está en ninguna de estas rectas. Demuéstrese que por el punto C se puede trazar una recta, y sólo una, que corta las rectas a y b.

3. Sean a_1, a_2, a_3, . . . unas rectas. Demuéstrese que si dos cualesquiera de estas rectas se cortan, todas ellas pasan por un mismo punto o pertenecen a un mismo plano.

4. Demuéstrese que si cuatro puntos cualesquiera de una figura están en un mismo plano, la figura es plana, o sea, se encuentra en un plano.

5. Sean dados $2n$ puntos A_1, A_2, . . ., A_{2n} y sea α un plano que no pasa por ninguno de estos puntos. Demuéstrese que el plano α corta como máximo n^2 de los segmentos A_pA_q que unen estos puntos de dos en dos.

§ 19. PARALELISMO DE RECTAS Y PLANOS

Rectas paralelas en el espacio. En el espacio dos rectas se llaman *paralelas* si están en un mismo plano y no se cortan.

TEOREMA 19.1. *Por el punto que está fuera de la recta se puede trazar una recta paralela a ésta y sólo una.*

DEMOSTRACION. Sea a una recta y sea A un punto que no se halla en esta recta (fig. 151). Tracemos el plano α que pasa por la recta a y por el punto A. Tracemos en el plano α la recta a_1 que pasa por el punto A y que es paralela a la recta a. Demostremos que la recta a_1, paralela a la a, es única.

Supongamos que existe otra recta a_2 que pasa por el punto A y que es paralela a la recta a. Por las rectas a y a_2 se puede trazar el plano α_2. El plano α_2 pasa por la recta a

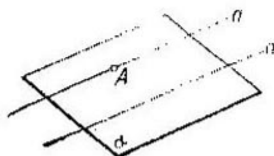


Fig. 151

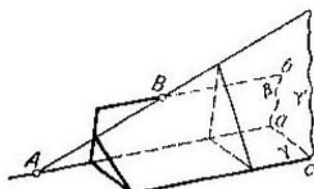


Fig. 152

y por el punto A, o sea, según el teorema 18.1, coincide con α. Ahora, basándonos en el axioma de las paralelas, deducimos que las rectas a_1 y a_2 coinciden. Queda demostrado el teorema.

TEOREMA 19.2. *Si la recta a es paralela a las rectas b y c, las rectas b y c son paralelas.*

DEMOSTRACION. El caso en que las rectas a, b y c están en un plano ha sido considerado en la Planimetría. Supongamos, por eso, que las rectas no se hallan en un plano. Sea β el plano en el que están las rectas a y b y sea γ el plano en el que se encuentran las rectas a y c. Los planos β y γ son distintos (fig. 152).

Tomemos en la recta b un punto B y tracemos el plano γ_1 que pasa por la recta c y el punto B. El plano γ_1 corta el plano β según la recta b_1. Afirmamos que la recta b_1 es paralela a la a.

Supongamos que la recta b_1 corta la recta a en un punto A. El punto A pertenece al plano γ y al plano γ_1, o sea, está en la recta c según la que se cortan estos planos. Hemos llegado a una contradicción ya que las rectas a y c en tanto que paralelas no pueden tener el punto A común. Por esto, la recta b_1 es paralela a la recta a.

Según el axioma de las paralelas, la recta b_1, paralela a la recta a, debe coincidir con la recta b. Puesto que la

recta b coincide con b_1, las rectas b y c están en un mismo plano, en el plano γ_1. No pueden cortarse ya que esto estaría en contradicción con el teorema 19.1, pues ambas son paralelas a la recta a. Es decir, las rectas b y c se hallan en un plano y no se cortan, o sea, son paralelas. Queda demostrado el teorema.

Paralelismo de la recta y del plano. La recta y el plano se denominan *paralelos* si no se cortan.

TEOREMA 19.3. *El plano α y la recta a que no le pertenece son paralelos si en el plano α existe una recta a_1 paralela a la recta a.*

DEMOSTRACION (fig. 153). Consideremos el plano α_1 que pasa por las rectas a y a_1. Es distinto del plano α ya que la recta a no se halla en el plano α. Los planos α y α_1

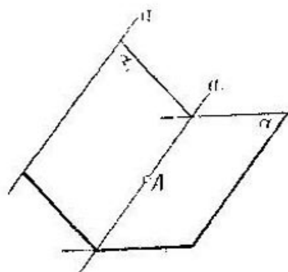


Fig. 153

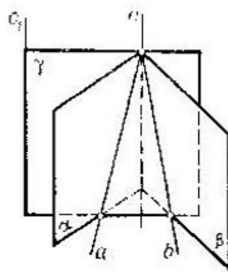


Fig. 154

se cortan según la recta a_1. Si la recta a cortase el plano α, el punto de intersección pertenecería a la recta a_1. Pero esto es imposible, pues las rectas a y a_1 son paralelas. Por lo tanto, la recta a no corta el plano α, o sea, es paralela al plano α. Queda demostrado el teorema.

TEOREMA 19.4. *Si la recta es paralela a cada uno de dos planos secantes, también es paralela a la recta de intersección de los mismos.*

DEMOSTRACION. Sean α y β dos planos secantes, c la recta según la que se cortan estos planos y c_1 una recta paralela a cada uno de los planos α y β (fig. 154.) Debemos demostrar que las rectas c y c_1 son paralelas.

Tracemos el plano γ que pasa por la recta c_1 y por un punto cualquiera de la recta c. El plano γ se corta con los planos α y β según las rectas a y b paralelas a c_1. Efectiva-

mente, las rectas a y b —pertenecientes a los planos α y β paralelos a la recta c_1— no pueden cortar esta recta.

Por el axioma de las paralelas, las rectas a y b coinciden. Como quiera que la recta a se halla en el plano α y la recta b está en el plano β, las rectas a y b han de coincidir con la recta c que es la intersección de los planos α y β. Es decir, la recta c es paralela a la recta c_1. Queda demostrado el teorema.

Paralelismo de los planos. Dos planos se denominan *paralelos* si no se cortan.

TEOREMA 19.5. *Si el plano α es paralelo a dos rectas secantes pertenecientes al plano β, los planos α y β son paralelos.*

DEMOSTRACION (fig. 155). Sean b_1 y b_2 dos rectas secantes en el plano β paralelas al plano α. Los planos α y β son distintos. Supongamos que se cortan según la recta c. Las rectas b_1 y b_2 no cortan el plano α ni, por consiguiente, la

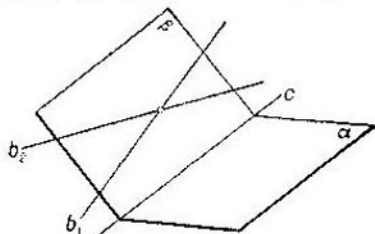


Fig. 155

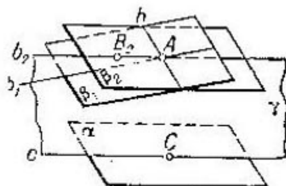


Fig. 156

recta c de este plano. Pero esto es imposible en virtud del axioma de las paralelas ya que las rectas b_1, b_2 y c se hallan en un mismo plano, en el plano β. Hemos llegado a una contradicción. Queda demostrado el teorema.

TEOREMA 19.6. *Por todo punto A exterior al plano α pasa un plano paralelo al α, y sólo uno.*

DEMOSTRACION. Tomemos en el plano α dos rectas secantes cualesquiera a' y a''. Tracemos por el punto A las rectas b' y b'' paralelas a éstas. El plano que pasa por las rectas b' y b'' es paralelo al plano α debido al teorema 19.5.

Supongamos que por el punto A pasan dos planos distintos β_1 y β_2 paralelos al plano α (fig. 156). Sea b la recta de intersección de estos planos. Tomemos en el plano β_2 un punto B_2 que no se halla en la recta b y tomemos un punto C en el plano α. Tracemos el plano γ que pasa por

los puntos A, B_2 y C. Corta los planos β_1 y β_2 según las rectas b_1 y b_2 y el plano α según la recta c. Las rectas b_1 y b_2 no cortan la recta c porque no cortan el plano α en el que están dichas rectas. Según el axioma de las paralelas, las rectas b_1 y b_2 coinciden. Es decir, los planos β_1 y β_2 pasan por dos rectas secantes b y b_1 distintas. Por lo tanto, coinciden debido al axioma E_3. Hemos llegado a una contradicción. Queda demostrado el teorema.

Segmentos de rectas paralelas entre planos paralelos. TEOREMA 19.7. *Si la recta corta el plano, corta también cualquier plano paralelo a éste.*

Si el plano corta la recta, corta también cualquier recta paralela a ésta.

DEMOSTRACION. Comencemos por la primera afirmación del teorema. Sea a una recta que corta el plano β y sea β_1

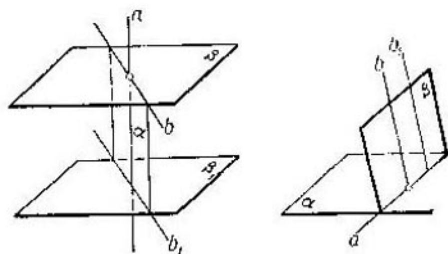


Fig. 157

un plano paralelo a β. Demostremos que la recta a corta el plano β_1 (fig. 157, a la izquierda).

Consideremos un plano α que pasa por la recta a y que corta el plano β_1. Corta el plano β según la recta b y el plano β_1 según la recta b_1. Si la recta a no cortase β_1, las rectas a y b serían paralelas a la recta b_1. Pero esto es imposible por el axioma de las paralelas. Queda demostrada la primera afirmación del teorema.

Demostremos la segunda afirmación del teorema. Supongamos que el plano α corta la recta b. Demostremos que corta toda recta b_1 parelela a b. Tracemos por las rectas b y b_1 el plano β. Corta el plano α según la recta a (fig. 157, a la derecha). Si el plano α no cortase la recta b_1, las rectas a y b serían paralelas a la recta b_1. Pero esto es imposible

por el axioma de las paralelas. Queda demostrado completamente el teorema.

TEOREMA 19.8. *Los segmentos de rectas paralelas comprendidos entre planos paralelos son iguales.*

DEMOSTRACION (fig. 158). Sean α y β dos planos paralelos y sean c_1 y c_2 dos rectas paralelas que los cortan. La recta c_1 corta los planos en los puntos A_1 y B_1 y la recta c_2 en los puntos A_2 y B_2. Demostremos la igualdad de los segmentos A_1B_1 y A_2B_2.

El cuadrilátero $A_1B_1B_2A_2$ está en el mismo plano que las paralelas c_1 y c_2. Sus lados opuestos A_1B_1 y A_2B_2 son paralelos por hipótesis del teorema. Los lados A_1A_2 y B_1B_2

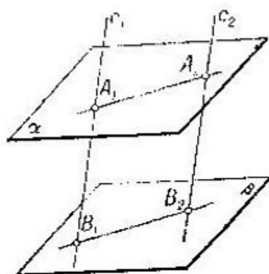


Fig. 158

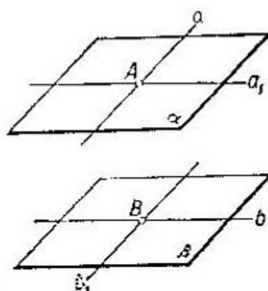


Fig. 159

son paralelos porque los planos α y β lo son. Por consiguiente, este cuadrilátero es un paralelogramo. Los segmentos A_1B_1 y A_2B_2 son iguales en tanto que lados opuestos del paralelogramo. Queda demostrado el teorema.

Rectas cruzadas. Dos rectas se denominan *cruzadas* si no están en un mismo plano. Por consiguiente, las rectas que se cruzan no son paralelas ni se cortan.

Dos rectas cruzadas cualesquiera se hallan en planos paralelos.

DEMOSTRACION. Sean a y b dos rectas que se cruzan. Tracemos por un punto cualquiera de la recta a la recta a_1 paralela a la recta b y por un punto cualquiera de la recta b la recta b_1 paralela a la a (fig. 159). Tracemos por las rectas a y a_1 el plano α y por las rectas b y b_1 el plano β. Los planos α y β son distintos, pues de lo contrario las rectas a y b estarían en un mismo plano. Los planos α y β son paralelos porque las rectas a y a_1 son paralelas al plano β. Queda demostrada la afirmación.

Ejercicios

1. Demuéstrese que tres planos distintos se cortan en un punto, pasan por una misma recta o son paralelos a una recta.

2. Demuéstrese que todas las rectas que pasan por un mismo punto y son paralelas a un mismo plano se encuentran en un plano.

3. Sean α_1, α_2 y α_3 tres planos paralelos y sean a y b dos rectas que los cortan. Demuéstrese que son proporcionales los segmentos correspondientes de las rectas a y b comprendidos entre los planos α_1, α_2 y α_3, o sea, que si A_1, A_2 y A_3 son los puntos de intersección de la recta a con los planos α_1, α_2 y α_3 y si B_1, B_2 y B_3 son los puntos de intersección de la recta b con estos planos, se tiene

$$\frac{A_1A_2}{B_1B_2}=\frac{A_2A_3}{B_2B_3}=\frac{A_3A_1}{B_3B_1}.$$

4. Sean A_1, A_2, A_3 y A_4 cuatro puntos que no se hallan en un mismo plano. Demuéstrese que el plano paralelo a las rectas cruzadas A_1A_2 y A_3A_4 corta las cuatro rectas restantes que unen estos puntos de dos en dos en los vértices de un paralelogramo.

5. Demuéstrese que es un plano el lugar geométrico de los puntos medios de los segmentos cuyos extremos están en dos rectas que se cruzan.

6. Sean A, B, C y D cuatro puntos que no están en un plano. Demuéstrese que se cortan en un punto las tres rectas que unen los puntos medios de los segmentos cruzados AB y CD, AC y BD, AD y BC.

§ 20. PERPENDICULARIDAD DE RECTAS Y PLANOS

Perpendicularidad de las rectas. El concepto de perpendicularidad para el caso de rectas secantes y, por consiguiente, pertenecientes a un mismo plano ha sido introducido en la Planimetría y es bien conocido. Definamos ahora el concepto de perpendicularidad en el caso de rectas que se cruzan. Para ello señalemos, ante todo, una propiedad de las rectas secantes perpendiculares.

TEOREMA 20.1. *Si dos rectas secantes a y b son perpendiculares, las rectas secantes a_1 y b_1 paralelas a éstas también son perpendiculares.*

DEMOSTRACION. Si las rectas a, b, a_1 y b_1 están en un mismo plano, la propiedad señalada es conocida a través de la Planimetría. Supongamos, por eso, que las rectas no pertenecen a un mismo plano. En este caso las rectas a y b están en un plano α y las rectas a_1 y b_1 están en un plano α_1 (fig. 160). Según el teorema 19.3, las rectas a y b son paralelas al plano α_1. En virtud del teorema 19.5, los planos α y α_1 son paralelos.

Sea C el punto de intersección de las rectas a y b y sea C_1 el punto de intersección de las rectas a_1 y b_1. Tracemos en el plano que contiene las rectas paralelas a y a_1 la paralela a la recta CC_1. Corta las rectas a y a_1 en los puntos A y A_1. Tracemos análogamente en el plano que contiene las rectas b y b_1 la paralela a la recta CC_1 e indiquemos por B y B_1 sus puntos de intersección con las rectas b y b_1.

Los cuadriláteros CAA_1C_1 y CBB_1C_1 son paralelogramos ya que sus lados opuestos son paralelos. El cuadrilátero ABB_1A_1 también es un paralelogramo. Sus lados AA_1 y BB_1 son paralelos porque cada uno de ellos es paralelo a la recta CC_1. Los lados AB y A_1B_1 se hallan en planos paralelos y, por ello, también son paralelos.

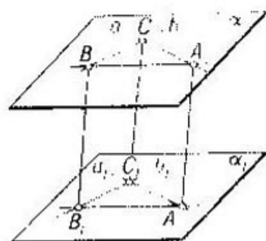


Fig. 160

Puesto que los lados opuestos del paralelogramo son iguales, se tiene $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ y $BC = B_1C_1$. Los triángulos ABC y $A_1B_1C_1$ son iguales por el tercer criterio de la igualdad de los triángulos. Esto significa que el ángulo $A_1C_1B_1$, igual al ángulo ACB, es recto, o sea, que las rectas a_1 y b_1 son perpendiculares. Queda demostrado el teorema.

Dos rectas que se cruzan se llaman *perpendiculares* si son perpendiculares las rectas secantes paralelas a éstas. De esta definición y del teorema 20.1 se desprende que cualesquiera que sean las rectas perpendiculares (secantes o cruzadas) las rectas secantes paralelas a ellas son perpendiculares.

TEOREMA 20.2. *Si la recta a es perpendicular a la recta b, también es perpendicular a cualquier recta b_1 paralela a b.*

DEMOSTRACIÓN. Tracemos las rectas secantes a_2 y b_2 paralelas, respectivamente, a las rectas a y b. Las rectas a_2 y b_2 son perpendiculares por ser perpendiculares las rectas a y b. Debido a la propiedad de las paralelas, la recta b_2 es paralela a b_1. Por consiguiente, las rectas a y b_1 son paralelas a las rectas secantes perpendiculares a_2 y b_2 y, por eso, son ellas mismas perpendiculares. Queda demostrado el teorema.

Perpendicularidad de la recta y del plano. La recta se denomina *perpendicular* al plano si es perpendicular a toda

recta que se encuentra en dicho plano. El teorema que sigue es el criterio principal de perpendicularidad de la recta y del plano.

TEOREMA 20.3. *Si la recta a es perpendicular a dos rectas secantes pertenecientes al plano α, la recta a es perpendicular al plano α.*

DEMOSTRACION (fig. 161). Sean b y c dos rectas secantes pertenecientes al plano α y perpendiculares a la recta a. Sea A el punto de intersección de las rectas b y c. Consideremos primero el caso en que la recta a pasa por el punto A.

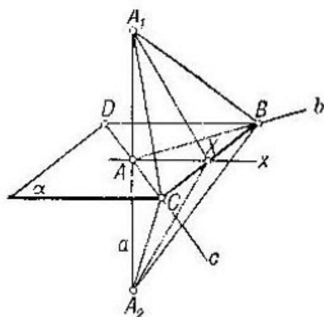


Fig. 161

Tracemos en el plano α una recta cualquiera x por el punto A y demostremos que es perpendicular a la recta a. Podemos aceptar que la recta x es distinta de las rectas b y c. Tomemos en la recta c dos puntos C y D a distintos lados del punto A y tomemos en la recta b un punto B distinto de A. La recta x corta el lado CD del triángulo CDB y, por consiguiente, en virtud del teorema demostrado en la Planimetría, corta en un punto X uno de los otros dos lados. Supongamos, para puntualizar, que se trata del lado BC.

Tomemos en la recta a, partiendo del punto A, dos segmentos iguales AA_1 y AA_2 a distintos lados de ese punto. El triángulo A_1CA_2 es isósceles, pues el segmento AC es altura por hipótesis del teorema y mediana por construcción ($AA_1 = AA_2$). Por la misma razón, es también isósceles el triángulo A_1BA_2. Entonces, son iguales los triángulos A_1BC y A_2BC en virtud del tercer criterio de la igualdad de los triángulos.

De la igualdad de los triángulos A_1BC y A_2BC se desprende la igualdad de los ángulos A_1BX y A_2BX y, por consiguiente, la igualdad de los triángulos A_1BX y A_2BX por el primer criterio de la igualdad. De la igualdad de los lados A_1X y A_2X de estos triángulos deducimos que el triángulo A_1XA_2 es isósceles. Por eso, su mediana XA es también altura. Esto significa precisamente que la recta x es perpendicular a la recta a.

Como quiera que la recta a es perpendicular a toda recta que pasa por el punto A, es perpendicular a cualquier recta x_1 que se halla en el plano α. Efectivamente, para esa recta x_1 se puede indicar la recta paralela x que pasa por el punto A. La perpendicularidad de las rectas a y x implica la perpendicularidad de las rectas a y x_1 debido al teorema 20.2. O sea, queda demostrado el teorema para el caso en que la recta a pasa por el punto A de intersección de las rectas b y c.

Consideremos el caso general. Supongamos que la recta a no pasa por el punto A. Tracemos por el punto A la recta a_1 paralela a la recta a. La recta a_1 es perpendicular a las rectas b y c según el teorema 20.2. Por lo tanto, la recta a_1 es perpendicular, como hemos demostrado, al plano. Esto significa que la recta a_1 es perpendicular a cualquier recta x del plano α. Según el teorema 20.2, la recta a, paralela a la recta a_1, también es perpendicular a cada una de estas rectas x. Es decir, la recta a es perpendicular al plano α. Queda demostrado el teorema.

El teorema 20.3 tiene un importante corolario que lleva el nombre de TEOREMA DE LAS TRES PERPENDICULARES. A saber, *si tres puntos A, B y C no están en una recta y dos de las tres rectas AB, BC y AC son perpendiculares a la recta a, la tercera recta es también perpendicular a la recta a.*

Efectivamente, por los tres puntos A, B y C se puede trazar un plano. Este plano es perpendicular a la recta a porque la recta a es perpendicular a dos rectas secantes que se encuentran en este plano. Por consiguiente, la recta a es perpendicular a cualquier recta de este plano y, en particular, es perpendicular a la tercera de las rectas.

Propiedades de la perpendicularidad de la recta y del plano. TEOREMA 20.4. *Si la recta a y el plano α son perpendiculares, toda recta a_1 paralela a la recta a es perpendicular al plano α. Todo plano α_1 paralelo al plano α es perpendicular a la recta a.*

DEMOSTRACION. La recta a es perpendicular a toda recta x del plano α. Según el teorema 20.2, la recta a_1 paralela a la recta a es también perpendicular a cada una de esas rectas x. Por consiguiente, la recta a_1 es perpendicular al plano α. Queda demostrada la primera afirmación del teorema.

Demostremos la segunda afirmación del teorema. Tomemos una recta cualquiera x_1 en el plano α_1. Tracemos por ella un plano que corte el plano α según la recta x. Puesto

que las rectas x y x_1 son paralelas y que la recta a es perpendicular a la recta x, resulta por el teorema 20.2 que la recta a es perpendicular a la recta x_1. Esto significa que la recta a es perpendicular al plano α_1. Queda demostrado completamente el teorema.

TEOREMA 20.5. *Dos rectas perpendiculares a un mismo plano son paralelas. Dos planos perpendiculares a una misma recta son paralelos.*

DEMOSTRACION. Sean a y a_1 rectas perpendiculares al plano α. Supongamos que las rectas a y a_1 no son paralelas. Tracemos por el punto de intersección de la recta a_1 y del

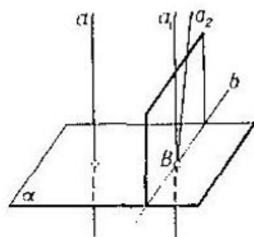


Fig. 162

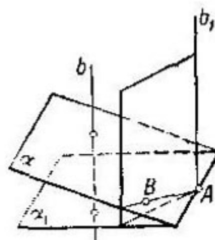


Fig. 163

plano α la recta a_2 paralela a la recta a (fig. 162). Según el teorema 20.4, la recta a_2 es perpendicular al plano α. Tracemos el plano que pasa por las rectas a_1 y a_2. Corta el plano α según la recta b. Puesto que las rectas a_1 y a_2 son perpendiculares al plano α, también son perpendiculares a la recta b. Pero esto es imposible. Hemos llegado a una contradicción. Queda demostrada la primera afirmación del teorema.

Demostremos la segunda afirmación del teorema. Sean α y α_1 dos planos perpendiculares a la recta b. Supongamos que los planos α y α_1 no son paralelos y, por consiguiente, tienen un punto común A. Tracemos por el punto A la recta b_1 paralela a la recta b (fig. 163). Según el teorema 20.4, la recta b_1 es perpendicular a los planos α y α_1. Tomemos en el plano α un punto B exterior al plano α_1 y consideremos el plano que pasa por la recta b_1 y por el punto B. Este plano corta los planos α y α_1 según dos rectas distintas, perpendiculares a la recta b_1, que pasan por el punto A. Pero esto es imposible. Hemos llegado a una contradicción. Queda demostrado completamente el teorema.

Construcción del plano y de la recta perpendiculares.

TEOREMA 20.6. *Por un punto se puede trazar un plano único perpendicular a la recta dada.*

DEMOSTRACION (fig. 164). Sean A un punto y a una recta. Tracemos por la recta a dos planos distintos β_1 y β_2. Tomando un punto cualquiera B de la recta a, tracemos por él en los planos β_1 y β_2 las rectas b_1 y b_2 perpendiculares a la recta a. Tracemos el plano α por las rectas b_1 y b_2. La recta a es perpendicular al plano α porque es perpendicular a dos rectas b_1 y b_2 de este plano (teorema 20.3). Tracemos el plano α_1 que pase por el punto A y sea paralelo al plano α. El plano α_1 es perpendicular a la recta a según el teorema 20.4.

Demostremos la unicidad del plano α_1 que pasa por el punto A y que es perpendicular a la recta a. Supongamos que por el punto A pasa un plano α_2 distinto de α_1 también perpendicular a la recta a. En virtud del teorema 20.5, los planos α_1 y α_2 son paralelos. Pero esto es imposible, pues tienen un punto común A. Hemos llegado a una contradicción. Queda demostrado el teorema.

TEOREMA 20.7. *Por un punto se puede trazar una recta única perpendicular al plano dado.*

DEMOSTRACION (fig. 165). Sean A un punto y α un plano. Tomemos en el plano α dos rectas secantes distintas. Tracemos por el punto de intersección de las mismas los planos

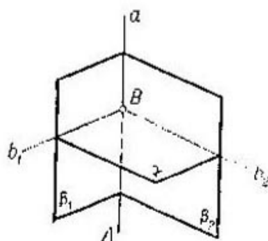


Fig. 164

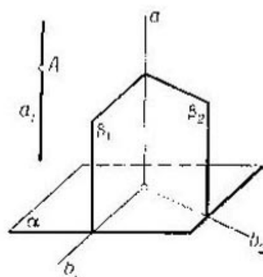


Fig. 165

β_1 y β_2 perpendiculares a estas rectas (teorema 20.6). Los planos β_1 y β_2 cortan el plano α según las rectas b_1 y b_2 y se cortan según la recta a. La recta a es perpendicular a las rectas b_1 y b_2, o sea, es perpendicular al plano α. Tra-

cemos por el punto A la recta a_1 paralela a la recta a. Según el teorema 20.4, la recta a_1 es perpendicular al plano α.

Demostremos la unicidad de la recta a_1 que pasa por el punto A perpendicularmente al plano α. Supongamos que por el punto A pasa una recta a_2, distinta de a_1, también perpendicular al plano α. Según el teorema 20.5, las rectas a_1 y a_2 son parelelas. Pero esto es imposible porque tienen el punto común A. Hemos llegado a una contradicción. Queda demostrado el teorema.

Perpendicular y oblicua. Sean α un plano, A un punto exterior al plano α y B un punto del plano α (fig. 166). El segmento AB se denomina *perpendicular* trazada desde el punto A al plano α si la recta AB es perpendicular al plano α. Sea C un punto del plano α distinto de B. El segmento AC se llama *oblicua* trazada desde el punto A al plano α. El segmento BC se denomina *proyección* de la oblicua.

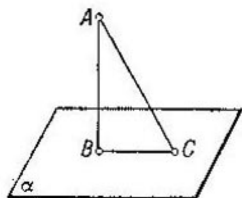


Fig. 166

La perpendicular y la oblicua trazadas al plano poseen propiedades análogas a las que tienen la perpendicular y la oblicua trazadas a la recta en el plano. Es decir, *la perpendicular trazada desde el punto A al plano α es más corta que cualquier oblicua trazada desde el mismo punto. La oblicua mayor tiene mayor proyección.*

DEMOSTRACION (fig. 166). El triángulo ABC es rectángulo de ángulo recto B. Según el teorema de Pitágoras,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2.$$

De aquí resulta, primero, que $AC > AB$, o sea, que la oblicua AC es mayor que la perpendicular AB, y segundo, que cuanto mayor sea AC mayor será BC, es decir, que cuanto mayor es la oblicua tanto mayor es su proyección. Queda demostrada la afirmación.

Se llama *distancia* entre el punto A y el plano α la longitud de la perpendicular trazada desde el punto A al plano α. *La distancia entre el punto A y el plano α es la menor de todas las distancias entre el punto A y los puntos del plano α.*

Al igual que las rectas paralelas en el plano, los planos paralelos en el espacio son equidistantes. Esto significa que *siendo α y β planos paralelos, dos puntos cualesquiera del plano α están a una misma distancia del plano β.*

DEMOSTRACION (fig. 167). Sean A_1 y A_2 dos puntos distintos del plano α. Tracemos desde ellos las perpendiculares A_1B_1 y A_2B_2 al plano β. Según el teorema 20.5, las rectas A_1B_1 y A_2B_2 son paralelas y, por ello, están en un plano. Las rectas A_1A_2 y B_1B_2 también son paralelas. Luego, el cuadrilátero $A_1A_2B_2B_1$ es un paralelogramo. Por consiguiente, los segmentos A_1B_1 y A_2B_2 son iguales en tanto que lados opuestos del paralelogramo. Queda demostrada la afirmación.

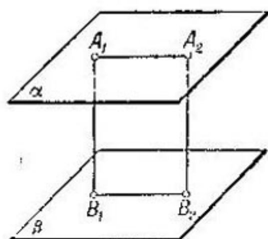


Fig. 167

Una propiedad análoga tiene lugar para la recta y el plano paralelo a ésta. O sea, *si a es una recta y α es un plano paralelo a ésta, todos los puntos de la recta a equidistan del plano α*. La demostración de esta afirmación es semejante a la que hemos dado para el caso de planos paralelos.

Sean a y b dos rectas que se cruzan y sean A y B puntos de estas rectas. El segmento AB se llama *perpendicular común* de las rectas cruzadas a y b si la recta AB es perpendicular a la recta a y a la recta b.

Las rectas cruzadas tienen una y sólo una perpendicular común.

DEMOSTRACION (fig. 168). Sean a y b rectas que se cruzan. Según hemos demostrado al final del § 19, existen dos planos paralelos α y β que pasan por las rectas a y b. Tracemos desde un punto arbitrario C de la recta a la perpendicular CD al plano β. Tracemos por el punto D la recta paralela a la a. Corta la recta b en el punto B. Tracemos por el punto B la recta paralela a CD. Corta la recta a en el punto A. La recta AB es perpendicular a los planos α y β y, por ello, es perpendicular a las rectas a y b. Es decir, el segmento AB representa la perpendicular común de las rectas a y b.

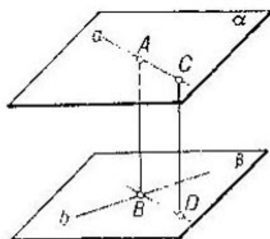


Fig. 168

Demostremos la unicidad de la perpendicular común. Supongamos que existe otra perpendicular común A_1B_1. La recta BD es paralela a la recta a. Por eso, las rectas AB

y A_1B_1, perpendiculares a las rectas a y b, son perpendiculares al plano β y, en consecuencia, son paralelas. Pero, entonces las rectas AA_1 y BB_1, o sea, las rectas a y b, se hallan en un mismo plano. Mas, esto es imposible puesto que las rectas a y b se cruzan. Queda demostrada completamente la afirmación.

Perpendicularidad de los planos. Sean α y β dos planos que se cortan según la recta c. Tracemos un plano γ perpendicular a la recta c (fig. 169). Cortará los planos α y β según las rectas a y b. Diremos que los planos α y β son *perpendiculares* si lo son las rectas a y b.

El concepto de perpendicularidad de los planos α y β definido de esta forma *no depende de qué* plano γ *se eliga.*

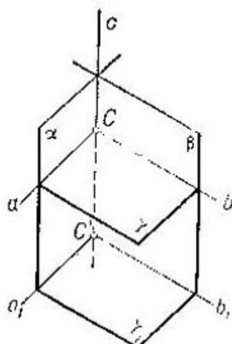


Fig. 169

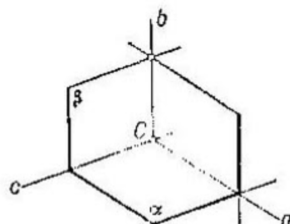


Fig. 170

Efectivamente, tracemos otro plano γ_1, distinto de γ, perpendicular a la recta c. Corta los planos α y β según las rectas a_1 y b_1. Los planos γ y γ_1 son paralelos pues son perpendiculares a la recta c. De aquí resulta que las rectas a y a_1 y las rectas b y b_1 son paralelas. Pero, según el teorema 19.1, la perpendicularidad de las rectas a y b implica la perpendicularidad de las rectas a_1 y b_1. Queda demostrada la afirmación.

TEOREMA 20.8. *El plano α es perpendicular al plano β si es perpendicular a una recta del plano β.*

DEMOSTRACION (fig. 170). Sea c la recta por donde se cortan los planos α y β y sea b una recta que está en el plano β y que es perpendicular al plano α. Tracemos en el plano α la recta a que pasa por el punto de intersección de las rectas b y c y que es perpendicular a la recta c.

La recta b es perpendicular a las rectas a y c, pues éstas pertenecen al plano α perpendicular a la recta b. La recta a es perpendicular a la recta c por construcción. Luego, el plano en el que se encuentran las rectas a y b es perpendicular a la recta c. Puesto que las rectas a y b son perpendiculares, los planos α y β lo son también por definición. Queda demostrado el teorema.

Del teorema 20.8 se deduce que *el plano* β *que pasa por la recta* b *perpendicular al plano* α *es también perpendicular al plano* α.

TEOREMA 20.9. *Si la recta* a *y el plano* α *son perpendiculares al plano* β, *la recta* a *está en el plano* α *o es paralela al plano* α.

DEMOSTRACION. Sea c la recta de intersección de los planos α y β (fig. 171). Tracemos un plano γ_1 perpendicular a la recta c. Cortará los planos α y β según las rectas perpendiculares a_1 y b_1. La recta a_1, perpendicular a las rectas c y b_1, es perpendicular al plano β. Por consiguiente, la recta a_1 es paralela a la recta a en virtud del teorema 20.5. Si la recta a no se encuentra en el plano α, es paralela al plano α según el teorema 19.2, pues es paralela a la recta a_1 que se halla en este plano. Queda demostrado el teorema.

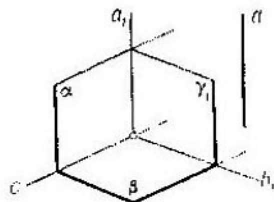


Fig. 171

Del teorema 20.9 se deduce que *la perpendicular trazada desde un punto cualquiera del plano* α *al plano perpendicular* β, *se encuentra en el plano* α.

TEOREMA 20.10. *Sean* α *y* β *dos planos distintos secantes y sea* γ *un plano perpendicular a cada uno de los planos* α *y* β. *El plano* γ *es, entonces, perpendicular a la recta* c *de intersección de los planos* α y β.

DEMOSTRACION (fig. 172). Tracemos la recta c_1 que es perpendicular al plano γ y que pasa por un punto exterior al plano α y al plano β. Según el teorema 20.9, la recta c_1 es paralela a los planos α y β. Por consiguiente, en virtud del teorema 19.4, la recta c_1 es paralela a la recta c. El teorema 20.4 implica ahora que la recta c es perpendicular al plano γ. Queda demostrado el teorema.

TEOREMA 20.11. *Sean* β *un plano y* b *una recta no perpendicular a él. Entonces, por la recta* b *se puede trazar un plano perpendicular al plano* β *y sólo uno.*

DEMOSTRACION (fig. 173). Tracemos por un punto arbitrario de la recta b la recta b_1 perpendicular al plano β.

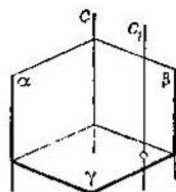


Fig. 172

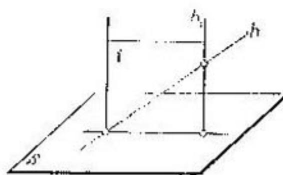


Fig. 173

El plano γ que pasa por las rectas b y b_1 es perpendicular al plano β en virtud del teorema 20.8.

Supongamos que por la recta b pasa otro plano γ_1 también perpendicular al plano β. Según el teorema 20.9, la recta b_1 está en el plano γ_1. Por el axioma E_3 los planos γ y γ_1 coinciden. Hemos llegado a una contradicción. Queda demostrado el teorema.

Ejercicios

1. Demuéstrese que las rectas que pasan por un mismo punto y que son perpendiculares a una misma recta pertenecen a un mismo plano.

2. Demuéstrese que por un punto se puede trazar una recta única que sea perpendicular a dos rectas no paralelas.

3. Demuéstrese que no existen cuatro rectas perpendiculares dos a dos.

4. Sean A, B, C y D cuatro puntos que no están en un mismo plano. Demuéstrese que se cortan en un punto los seis planos perpendiculares en los puntos medios a los segmentos que unen de dos en dos estos puntos. Dicho punto equidista de los cuatro puntos dados.

5. Demuéstrese que el lugar geométrico de los puntos equidistantes de dos puntos A y B es el plano que pasa por el punto medio del segmento AB y que es perpendicular a él.

6. Sea ABC un triángulo situado a un lado del plano α y sean a, b y c las distancias entre el plano α y los vértices del triángulo. Demuéstrese que la distancia entre el centro de gravedad del triángulo (punto de intersección de sus medianas) y el plano α es igual a $\frac{a+b+c}{3}$. ¿Cómo varía esta distancia si los vértices A y B están a un lado del plano α y el vértice C está al otro lado?

7. Demuéstrese que el lugar geométrico de los puntos equidistantes de dos planos secantes consta de dos planos.

8. Demuéstrese que es una circunferencia el lugar geométrico de los pies de las perpendiculares trazadas desde un mismo punto a los planos que pasan por una misma recta.

9. Demuéstrese que es una circunferencia el lugar geométrico de los pies de las oblicuas iguales trazadas desde un mismo punto a un plano determinado.

§ 21. ANGULOS ENTRE RECTAS Y PLANOS

Angulo entre rectas. Dos rectas secantes forman ángulos adyacentes y verticales. Los ángulos verticales son iguales y los adyacentes se complementan sumando dos rectos. La medida angular del menor de estos ángulos se denomina *valor principal* del ángulo entre rectas. Por consiguiente, el valor principal del ángulo entre rectas no es mayor que $90°\left(\frac{\pi}{2}\right)$. En lo sucesivo, siempre entenderemos por ángulo entre rectas el valor principal.

Llamaremos ángulo entre rectas cruzadas el ángulo entre rectas secantes paralelas a aquéllas. Mostremos que *este ángulo no depende de qué rectas secantes se toman*. La demostración se fundamenta en las mismas ideas que la demostración del teorema 20.1 (§ 20).

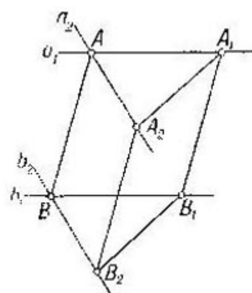


Fig. 174

Sean a_1 y a_2 dos rectas que se cortan en el punto A y que son paralelas a las rectas cruzadas consideradas. Sean b_1 y b_2 otro par de rectas análogas pero cortándose en el punto B. Supongamos que las rectas a_1, a_2, b_1 y b_2 no pertenecen a un mismo plano (fig. 174). En este caso, los planos α y β, que contienen las rectas a_1 y a_2 y las rectas b_1 y b_2 respectivamente, son paralelos. Tomemos en las rectas a_1 y a_2 unos puntos A_1 y A_2 distintos de A y tracemos las rectas A_1B_1 y A_2B_2 paralelas a la recta AB. Los cuadriláteros AA_1B_1B, AA_2B_2B y $A_1A_2B_2B_1$ son paralelogramos. Por consiguiente, $AA_1 = BB_1$, $AA_2 = BB_2$ y $A_1B_1 = A_2B_2$. En virtud del tercer criterio de la igualdad, los triángulos AA_1A_2 y BB_1B_2 son iguales. De la igualdad de los triángulos resulta la igualdad de sus ángulos A y B y, por consiguiente, la igualdad de los ángulos entre las rectas a_1 y a_2 y las rectas b_1 y b_2 en el sentido del valor principal.

Si las rectas a_1, a_2, b_1 y b_2 están en un mismo plano, tomemos las rectas secantes c_1 y c_2 que son paralelas a éstas y que no pertenecen al plano mencionado. Según lo demostrado, los ángulos entre las rectas a_1 y a_2 y las rectas b_1 y b_2 son iguales al ángulo entre las rectas c_1 y c_2 y, consecuentemente, son iguales entre sí. Queda demostrada la afirmación.

Hemos definido el concepto del ángulo entre rectas secantes y rectas cruzadas. Ahora completaremos esta definición aceptando que *el ángulo entre rectas paralelas o coincidentes es igual a cero*. Esta acepción sobre el ángulo entre rectas paralelas o coincidentes nos libera de la necesidad de considerar especialmente los casos peculiares de posición de rectas al enunciar los teoremas correspondientes a los ángulos.

TEOREMA 21.1. *Sean a_1 y a_2 dos rectas y sean b_1 y b_2 rectas paralelas a éstas. El ángulo entre las rectas a_1 y a_2 es entonces igual al ángulo entre las rectas b_1 y b_2.*

DEMOSTRACION. Si las rectas a_1 y a_2 son paralelas o coinciden, las rectas b_1 y b_2 también son paralelas o coinciden. En ambos casos los ángulos entre las rectas a_1 y a_2 y entre las rectas b_1 y b_2 son iguales a cero y, por consiguiente, son iguales entre sí. La igualdad de los ángulos para el caso de rectas secantes ha sido demostrada anteriormente. En el caso de rectas cruzadas, la igualdad de los ángulos se desprende de la definición del concepto de ángulo entre tales rectas. Queda demostrado el teorema.

Angulo entre recta y plano. Sea α un plano y sea a una recta. *El ángulo entre la recta a y el plano* α se define como sigue. Si la recta a es paralela al plano α o se halla en este plano, el ángulo entre los mismos se considera igual a cero. Si la recta a es perpendicular al plano α, el ángulo se considera igual a $90° \left(\frac{\pi}{2}\right)$.

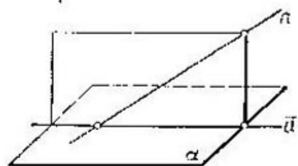


Fig. 175

Supongamos ahora que la recta a corta el plano α pero no es perpendicular a él. Tracemos por la recta a el plano perpendicular al plano α (fig. 175). Corta el plano α según la recta $\bar{a}$ llamada *proyección* de la recta a sobre el plano α. Llamaremos ángulo entre la recta a y el

plano α el ángulo entre las rectas a y $\bar{a}$, o sea, el ángulo entre la recta a y su proyección sobre el plano α.

TEOREMA 21.2. *El ángulo entre la recta a y el plano α complementa hasta hacerlo recto el ángulo entre la recta a y toda perpendicular al plano α.*

DEMOSTRACION. Si la recta a se encuentra en el plano α o es paralela a éste, el ángulo entre a y α es igual a cero. Y como el ángulo entre la recta a y toda perpendicular al plano α es igual a 90°, la afirmación del teorema es evidente. Si la recta a es perpendicular al plano α, toda perpendicular al plano α coincide con a o es paralela a esta recta. El ángulo entre la recta a y el plano α es de 90° y el ángulo entre la recta a y toda perpendicular al plano α es igual a cero. La afirmación del teorema también es evidente.

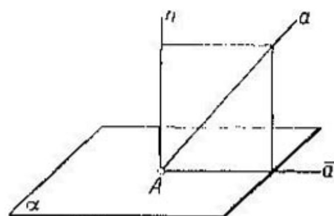


Fig. 176

Consideremos el caso general. Supongamos que la recta a corta el plano α en el punto A (fig. 176). Tracemos por el punto A la perpendicular n al plano α. Las tres rectas a, $\bar{a}$ y n están en un mismo plano, en el plano que proyecta la recta a sobre el plano α. Como quiera que el ángulo entre n y $\bar{a}$ es recto, los valores principales de los ángulos entre las rectas a y n y entre las rectas $\bar{a}$ y a se complementan hasta 90°. Queda demostrado el teorema.

TEOREMA 21.3. *Sean a y b dos rectas paralelas y sean α y β dos planos paralelos. El ángulo entre la recta a y el plano α es igual entonces al ángulo entre la recta b y el plano β.*

DEMOSTRACION. Sean a' y b' dos rectas perpendiculares a los planos α y β respectivamente. Las rectas a' y b' son paralelas o coincidentes. Según el teorema 21.1, los ángulos entre las rectas a y a' y entre las rectas b y b' son iguales. Por eso, los ángulos que complementan éstos hasta 90° también son iguales. Según el teorema 21.2, de aquí se desprende la igualdad de los ángulos entre la recta a y el plano α y entre la recta b y el plano β. Queda demostrado el teorema.

Angulo entre planos. Definamos el concepto de *ángulo entre dos planos*. Si los planos α y β son paralelos o coinciden, consideramos el ángulo entre ellos igual a cero. Supongamos

que los planos α y β no son paralelos ni coinciden. Entonces se cortan según la recta c (fig. 177). Tracemos un plano γ perpendicular a la recta c. Corta los planos α y β según las rectas a y b. El ángulo entre los planos α y β se considera igual al ángulo entre las rectas a y b. Esta definición del *ángulo entre planos no depende de qué plano secante γ se eliga*. Efectivamente, sea γ' otro plano perpendicular a la recta c. Corta los planos α y β según las rectas a' y b' paralelas a las rectas a y b. Por consiguiente, las rectas a' y b' forman el mismo ángulo que las rectas a y b. Queda demostrada la afirmación.

TEOREMA 21.4. *El ángulo entre los planos α y β es igual al ángulo entre las perpendiculares a y b a estos planos.*

DEMOSTRACION. Hagamos, ante todo, una observación. Sean a y b dos rectas perpendiculares pertenecientes a un

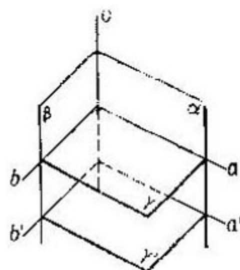


Fig. 177

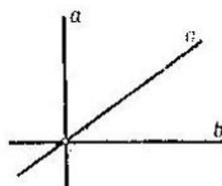


Fig. 178

mismo plano. Sea c cualquier recta de este plano que pasa por el punto de intersección de las rectas a y b. En este caso, los ángulos que la recta c forma con las rectas a y b se complementan hasta 90° (fig. 178). Pasemos ahora a la demostración del teorema.

Si los planos α y β son paralelos o coinciden, las rectas a y b, perpendiculares a éstos, también son paralelas o coinciden. En este caso, el ángulo entre los planos y el ángulo entre las rectas son iguales a cero. Por consiguiente, el ángulo entre los planos es igual al ángulo entre las perpendiculares a los mismos.

Supongamos ahora que los planos α y β no coinciden ni son paralelos, o sea, que se cortan según la recta c. Tracemos un plano γ perpendicular a la recta c (fig. 179). Corta los planos α y β según las rectas a_1 y b_1 y corta la recta c en el

punto C. Tracemos por el punto C las rectas a y b perpendiculares a los planos α y β. Pertenecen al plano γ.

Como hemos explicado, el ángulo entre las rectas a_1 y b complementa hasta 90° el ángulo entre las rectas a_1 y b_1. El ángulo entre las rectas a y b complementa hasta 90° el ángulo entre las rectas a_1 y b. En resumen, el ángulo entre las rectas a_1 y b_1 es igual al ángulo entre las rectas a y b. Queda demostrado el teorema.

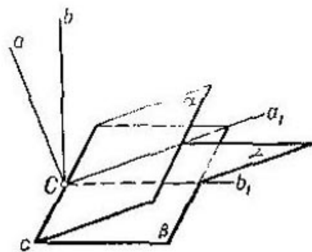


Fig. 179

TEOREMA 21.5. *Si el plano α es paralelo al plano α' y el plano β es paralelo al plano β', el ángulo entre los planos α y β es igual al ángulo entre los planos α' y β'.*

DEMOSTRACION. Tracemos una recta a perpendicular al plano α. Esta recta es perpendicular al plano α'. Análogamente, toda recta b perpendicular al plano β es perpendicular al plano β'. Según el teorema 21.4, el ángulo entre dos planos es igual al ángulo entre las perpendiculares a estos planos. Por consiguiente, el ángulo entre los planos α y β y el ángulo entre los planos α' y β' tienen ambos el mismo valor, el del ángulo entre las rectas a y b. Queda demostrado el teorema.

Ejercicios

1. Sean A, B y C tres puntos que no se hallan en una recta. ¿Cuánto vale el ángulo entre las rectas CA y CB si estas rectas forman ángulos α y β con la recta AB, siendo $\alpha + \beta < 90°$?

2. Sean α un plano, a una recta que lo corta y x una recta cualquiera del plano. α. Demuéstrese que el ángulo entre las rectas a y x no es menor que el ángulo entre la recta a y el plano α.

3. Sea a una recta y sean α_1, α_2 y α_3 los ángulos que forma con tres rectas recíprocamente perpendiculares. Demuéstrese que

$$\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3 = 1.$$

4. Sean α_1, α_2 y α_3 los ángulos que forma una recta con tres planos recíprocamente perpendiculares. Demuéstrese que

$$\operatorname{sen}^2 \alpha_1 + \operatorname{sen}^2 \alpha_2 + \operatorname{sen}^2 \alpha_3 = 1.$$

5. Sean α_1, α_2 y α_3 y, respectivamente, β_1, β_2 y β_3 los ángulos que las rectas a y b forman con tres rectas recíprocamente perpendicu-

lares. Demuéstrese que siendo φ el ángulo entre las rectas a y b se tiene

$$\cos\varphi = \cos\alpha_1 \cos\beta_1 + \cos\alpha_2 \cos\beta_2 + \cos\alpha_3 \cos\beta_3.$$

§ 22. ANGULOS DIEDROS, TRIEDROS Y POLIEDROS

Definición de los ángulos diedros y triedros. Sean α y β dos planos que se cortan según la recta c. La recta c divide cada uno de los planos α y β en dos semiplanos. Tomemos en cada uno de estos planos un semiplano llamándolos

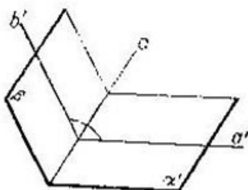


Fig. 180

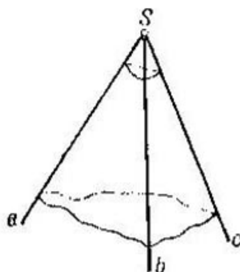


Fig. 181

α' y β' (fig. 180). La figura formada por los semiplanos α' y β' se llama *ángulo diedro* y los propios semiplanos α' y β' se denominan *caras* del ángulo diedro. La recta c recibe el nombre de *arista* del ángulo diedro. Tracemos un plano cualquiera γ perpendicular a la recta c. Cortará los semiplanos α' y β' según las semirrectas a' y b'. El ángulo que forman las semirrectas a' y b' se denomina *ángulo rectilíneo* del ángulo diedro. La medida del ángulo diedro se considera igual a la medida del rectilíneo correspondiente. Todos los rectilíneos del ángulo diedro son iguales y, por ello, la medida del ángulo diedro no depende de qué rectilíneo se eliga.

Es importante subrayar la diferencia entre el ángulo formado por los planos α y β y el ángulo entre los semiplanos α' y β' de estos planos. El ángulo entre los planos no es nunca mayor que el recto. El ángulo diedro puede tener cualquier valor comprendido entre cero y 180°. Si el ángulo diedro es menor o igual a 90°, el ángulo entre los planos a los que pertenecen sus caras es igual al ángulo diedro. En el caso contrario, complementa hasta 180° el ángulo diedro.

Sean a, b y c tres semirrectas que parten del mismo punto S y que no pertenecen a un mismo plano (fig. 181). Las semirrectas a, b y c forman tres ángulos (ab), (bc) y (ac). La figura constituida por estos tres ángulos se denomina *ángulo triedro*. El punto S recibe el nombre de *vértice* del ángulo triedro, las semirrectas a, b y c se denominan *aristas* y los propios ángulos planos se llaman *caras*. Los planos de los ángulos (ab) y (ac) se cortan según la recta que contiene la semirrecta a. Los semiplanos de estos planos que contienen las semirrectas b y c forman un ángulo diedro. Este ángulo se denomina *ángulo diedro relativo a la arista a del ángulo triedro*. También se dice que es el ángulo diedro opuesto al ángulo plano (bc).

Teorema de los cosenos para el ángulo triedro. TEOREMA. 22.1. *Sean α, β y γ los ángulos planos del ángulo triedro y sea C el ángulo diedro opuesto al ángulo plano γ. Entonces, se tiene*

$$\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\cos C.$$

DEMOSTRACION. Sea S el vértice del ángulo triedro, sean a, b y c sus aristas, sean α, β y γ los ángulos planos formados

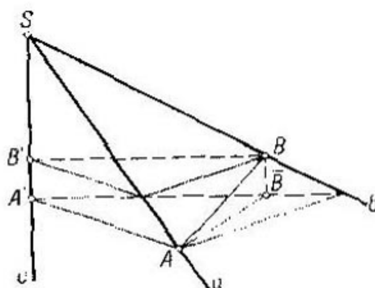


Fig. 182

por las aristas b y c, c y a, a y b respectivamente y sea C el ángulo diedro relativo a la arista c, es decir, el ángulo diedro opuesto al ángulo plano γ (fig. 182). Tomemos en las aristas a y b los segmentos SA y SB de longitud unidad. Aplicando el teorema del coseno al triángulo ASB, tendremos

$$AB^2 = 1 + 1 - 2\cos\gamma.$$

Calculemos ahora la longitud del segmento AB por otro método. Tracemos, para ello, los planos que pasan por los puntos A y B y que son perpendiculares a la arista c. Cortarán esta arista o su prolongación en los puntos A' y B'. Sea $\bar{B}$ el pie de la perpendicular trazada desde el punto B al plano que pasa por el punto A. Aplicando el teorema del coseno al triángulo $AA'\bar{B}$, tendremos

$$A\bar{B}^2 = AA'^2 + A'\bar{B}^2 - 2\,AA'\cdot A'\bar{B}\cos C.$$

Pero $AA' = \operatorname{sen}\beta$ y $A'\bar{B} = BB' = \operatorname{sen}\alpha$. Por lo tanto,

$$A\bar{B}^2 = \operatorname{sen}^2\alpha + \operatorname{sen}^2\beta - 2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\cos C.$$

Del triángulo rectángulo $AB\bar{B}$ obtenemos por el teorema de Pitágoras

$$AB^2 = A\bar{B}^2 + B\bar{B}^2.$$

Pero $B\bar{B} = |\cos\beta - \cos\alpha|$. Por eso,

$$AB^2 = \operatorname{sen}^2\alpha + \operatorname{sen}^2\beta + (\cos\beta - \cos\alpha)^2 - $$
$$- 2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\cos C =$$
$$= 2 - 2\cos\alpha\cos\beta - 2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\cos C.$$

Comparando las dos expresiones obtenidas para AB^2, encontramos

$$\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\cos C.$$

Queda demostrado el teorema.

Angulo triedro polar a un ángulo triedro. Sean a, b y c las aristas del ángulo triedro de vértice S. El plano del ángulo (bc) divide el espacio en dos semiespacios. La semirrecta a está en uno de ellos. Tracemos por el punto S la semirrecta a' perpendicular al plano del ángulo (bc) dirigiéndola al semiespacio suplementario al que pertenece la semirrecta a. Construyamos de la misma forma las semirrectas b' y c' perpendiculares a los planos de los ángulos (ac) y (ab) respectivamente. El ángulo triedro cuyas aristas son las semirrectas a', b' y c' se llama *polar* al ángulo (abc) inicial (fig. 183). Es fácil ver que *las caras del ángulo polar*

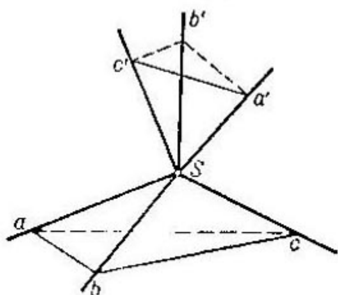


Fig. 183

son perpendiculares a las aristas del inicial. La propiedad de polaridad de los ángulos triedros es recíproca, o sea, si el ángulo triedro $(a'b'c')$ es polar al ángulo triedro (abc), el ángulo triedro (abc) es polar al ángulo triedro $(a'b'c')$. Basándonos en la propiedad de los ángulos de lados perpendiculares, deducimos que los ángulos planos del ángulo polar complementan hasta 180° los diedros respectivos del ángulo triedro inicial. Por ejemplo, el ángulo plano $(b'c')$ complementa hasta 180° el ángulo diedro relativo a la arista a, etc. Análogamente, los diedros del ángulo triedro polar complementan hasta 180° los ángulos planos correspondientes del inicial. En particular, el ángulo diedro relativo a la arista a' complementa hasta 180° el ángulo plano (bc).

TEOREMA 22.2. *Sean A, B y C los ángulos diedros del ángulo triedro. Sea γ el ángulo plano opuesto al ángulo diedro C. Entonces, se tiene*

$$\cos C = -\cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \cos \gamma.$$

Este teorema es corolario directo del teorema 22.1 aplicado al ángulo triedro polar al ángulo inicial.

Teorema de los senos para el ángulo triedro. TEOREMA 22.3. *Sean α, β y γ los ángulos planos del ángulo triedro y sean A, B y C los ángulos diedros opuestos a éstos. Entonces se tiene*

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}A} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}B} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}C}.$$

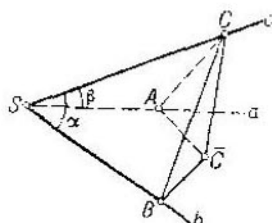


Fig. 184

DEMOSTRACION. Tomemos en la arista c del ángulo triedro el segmento SC de longitud unidad (fig. 184). Tracemos desde el punto C la perpendicular al plano del ángulo (ab). Sea $\bar{C}$ el pie de esta perpendicular. Tracemos por el punto C los planos perpendiculares a las aristas a y b y llamemos A y B los puntos de intersección de estos planos con las aristas a y b o con sus prolongaciones.

Calculemos la longitud de la perpendicular $C\bar{C}$. El triángulo rectángulo SCB de ángulo recto B da

$$CB = 1 \cdot \operatorname{sen}\alpha.$$

Ahora, partiendo del triángulo rectángulo $CB\bar{C}$ de ángulo recto $\bar{C}$, encontramos la longitud de la perpendicular $C\bar{C}$:

$$C\bar{C} = CB \operatorname{sen} B = \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen} B$$

La longitud de la perpendicular $C\bar{C}$ se puede determinar de otro modo, empleando los triángulos rectángulos ACS y $CA\bar{C}$. Esto da

$$C\bar{C} = \text{sen}\,\beta\,\text{sen}\,A.$$

Comparando las expresiones obtenidas para el segmento $C\bar{C}$, encontramos

$$\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,B = \text{sen}\,\beta\,\text{sen}\,A.$$

De aquí resulta

$$\frac{\text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\,A} = \frac{\text{sen}\,\beta}{\text{sen}\,B}.$$

Análogamente se obtiene la proporción

$$\frac{\text{sen}\,\beta}{\text{sen}\,B} = \frac{\text{sen}\,\gamma}{\text{sen}\,C}.$$

Queda demostrado el teorema.

Relación entre los ángulos planos del ángulo triedro. TEOREMA 22.4. *En el ángulo triedro todo ángulo plano es menor que la suma de los otros dos ángulos planos.*

DEMOSTRACION. Sean α, β y γ los ángulos planos del ángulo triedro. Mostremos que $\gamma < \alpha + \beta$. Aplicando al ángulo triedro el teorema 22.1, obtenemos

$$\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta + \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta\cos C.$$

Puesto que $\cos C > -1$ y que sen α y sen β son positivos, tenemos la desigualdad

$$\cos\gamma > \cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta.$$

El segundo miembro de esta desigualdad no es otra cosa sino $\cos(\alpha + \beta)$. Por consiguiente, $\cos\gamma > \cos(\alpha + \beta)$. Como se sabe, el coseno del ángulo disminuye cuando el ángulo aumenta de 0° hasta 180°. De aquí resulta que $\gamma < < \alpha + \beta$. Queda demostrado el teorema.

Angulos poliedros. Supongamos que las semirrectas $a_1, a_2, \ldots, a_n$ parten de un mismo punto S de modo que tres semirrectas consecutivas cualesquiera a_1, a_2, a_3; a_2, a_3, a_4; . . . ; a_n, a_1, a_2 no se hallen en un mismo plano. La figura formada por los ángulos planos $(a_1, a_2), (a_2, a_3), \ldots$ . . ., (a_n, a_1) se llama ángulo *poliedro* (fig. 185). El punto S se denomina *vértice* del ángulo poliedro y las semirrectas

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ son sus *aristas*. El ángulo poliedro se dice *convexo* si está a un lado de cualquiera de sus ángulos planos.

TEOREMA 22.5. *La suma de los ángulos planos del ángulo poliedro convexo es menor que* 360°.

DEMOSTRACION. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ las aristas del ángulo poliedro convexo de vértice S. Tomemos en las aristas a_1 y a_2 unos puntos A_1 y A_2. Tomemos ahora en la arista a_3 un punto A_3 suficientemente próximo al vértice S y consideremos el plano α que pasa por los puntos A_1, A_2 y A_3 (fig. 185). Si el punto A_3 está suficientemente próximo al

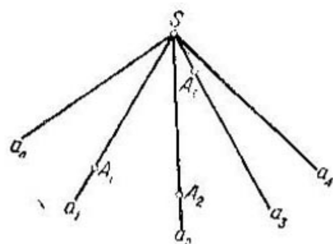


Fig. 185

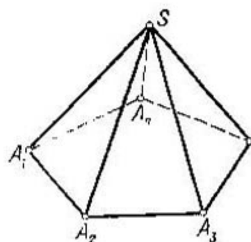


Fig. 186

vértice S, el plano α corta todas las aristas $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Sean $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ los puntos de intersección del plano α y de las aristas del ángulo S. Como el ángulo poliedro S es convexo, resulta que es convexo el polígono P de vértices $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (fig. 186).

Consideremos el ángulo poliedro S y los ángulos triedros de vértices $A_1, A_2, \ldots, A_n$. La suma de todos los ángulos planos de estos últimos se compone de la suma de los ángulos del polígono P (o sea, de $180°n - 360°$) y de la suma de los ángulos de los triángulos A_1A_2S, A_2A_3S, ..., A_nA_1S (o sea, de $180°n$). Por lo tanto, la suma de todos los ángulos planos es igual a $2 \cdot 180°n - 360°$.

En cualquiera de los ángulos triedros A_k el ángulo perteneciente al polígono P es menor que la suma de los otros dos ángulos. Por eso, la suma que hemos encontrado de todos los ángulos planos es mayor que $(180°n - 360°)\,2 + \vartheta$, donde ϑ es la suma de los ángulos planos en el vértice S, o sea, $(180°n - 360°)\,2 + \vartheta < 2 \cdot 180°n - 360°$. De aquí resulta $\vartheta < 360°$. Queda demostrado el teorema.

Ejercicios

1. Tres rectas a, b y c no pertenecientes a un mismo plano se cortan en el punto O. El punto O divide cada una de estas rectas en dos semirrectas. Tomando una semirrecta de cada recta, se puede construir ocho ángulos triedros. Exprésense sus ángulos planos y diedros a través de los ángulos planos y diedros de uno de ellos.

2. Sean, en un ángulo triedro, α, β y γ los ángulos planos y A, B y C los ángulos diedros opuestos a ellos. Sea φ el ángulo entre la arista del ángulo diedro C y el plano del ángulo γ. Demuéstrese que

$$\operatorname{sen} \varphi = \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} A = \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} B.$$

3. Dos ángulos planos del ángulo triedro son iguales a α y el ángulo diedro comprendido entre ellos es igual a φ. Hállense los ángulos restantes.

4. Un ángulo diedro del ángulo triedro es recto y los ángulos planos contiguos son iguales a α y β. Hállense los ángulos restantes.

5. En el ángulo triedro son conocidos un ángulo plano y dos ángulos diedros contiguos a éste con la particularidad de que uno de estos ángulos diedros es recto. Hállense los ángulos restantes.

§ 23. MOVIMIENTO Y OTRAS TRANSFORMACIONES EN EL ESPACIO

El movimiento y sus propiedades. El concepto del movimiento se introduce en el espacio igual que en el plano. Es decir, entendemos por *movimiento* toda aplicación biunívoca del espacio en sí mismo que conserva las distancias entre los puntos. O sea, si X e Y son dos puntos cualesquiera del espacio y X' e Y' son los puntos que les corresponden, se tiene $XY = X'Y'$. El movimiento en el espacio posee propiedades análogas a las que tiene el movimiento en el plano. En particular, *por efecto de un movimiento las rectas se transforman en rectas conservándose el orden de los puntos en la recta.* Esto significa que si tres puntos A, B y C están en una recta y el punto B se halla entre A y C, los puntos correspondientes A', B' y C' también se encuentran en una recta estando el punto B' entre A' y C'. La demostración de esta propiedad del movimiento en el espacio en nada difiere de la demostración respectiva para el movimiento en el plano. Por esta razón no la damos.

Por efecto de un movimiento en el espacio, los planos se transforman en planos. Demostremos esta propiedad. Sea α un plano y sean A, B y C tres puntos del mismo no pertenecientes a una recta. El movimiento transforma estos puntos en los puntos A', B' y C' que tampoco se hallan

en una recta. Sea α' el plano que pasa por los puntos A', B' y C'. Mostremos que el movimiento considerado transforma el plano α en el plano α'.

Sea X un punto cualquiera del plano α. Tracemos en el plano α la recta que pasa por el punto X y que corta el triángulo ABC en dos puntos P y Q. Los puntos P' y Q', correspondientes a P y Q, pertenecen al triángulo $A'B'C'$ y, por ende, al plano α' también. Como quiera que la recta PQ se transforma en la recta $P'Q'$ y puesto que el punto X está en la recta PQ, resulta que el punto X' que le corresponde se halla en la recta $P'Q'$ y, por consiguiente, en el plano α'. O sea, el movimiento transforma todo punto X del plano α en un punto X' del plano α'.

Mostremos ahora que todo punto X' del plano α' es imagen de un punto determinado X del plano α. Con este fin, tracemos la recta que pasa por el punto X' y que corta el triángulo $A'B'C'$ en dos puntos P' y Q'. Sean P y Q los puntos cuyas imágenes son los puntos P' y Q'. La recta PQ se transforma, por efecto del movimiento, en la recta $P'Q'$. Por consiguiente, el punto X' es imagen de uno de los puntos que pertenece a la recta PQ y, por ende, al plano α también. Queda demostrada la afirmación.

Igual que en la Planimetría, a través del movimiento, se define la igualdad de las figuras espaciales. Es decir, dos figuras F y F' se llaman *iguales* si coinciden por efecto de un movimiento, o sea, si existe un movimiento que transforma la figura F en la figura F'.

Simetrías respecto al plano y al punto. Igual que en el plano se introduce el concepto de simetría respecto a la recta, en el espacio se introduce el concepto de simetría respecto al plano. A saber, sea α un plano y sea X un punto cualquiera del espacio. Tracemos por el punto X la recta a perpendicular al plano α. Cortará el plano α en un punto A. Construyamos ahora el punto X' ateniéndonos a la regla siguiente. Si el punto X se halla en el plano α, el punto X' coincide con X. Si el punto X no se halla en el plano α, el punto X' se encuentra en el otro semiespacio respecto al plano α, pertenece a la recta a y las distancias AX y AX' son iguales (fig. 187). El punto X' se llama *simétrico* del punto X respecto al plano α. La aplicación del espacio en sí mismo que a todo punto X le pone en correspondencia el punto X' simétrico respecto al plano α, se llama *transformación de simetría* o *reflexión especular respecto al plano* α.

Igual que la reflexión especular respecto a la recta en el plano, *la reflexión especular respecto al plano en el espacio es un movimiento*. Para demostrar esta afirmación basta observar que en el espacio la reflexión especular respecto al plano α se reduce para todo plano β, perpendicular al α, a la reflexión especular respecto a la recta según la que se cortan los planos α y β. Aclaremos esto.

Sean P y Q dos puntos arbitrarios del espacio. Tracemos el plano β que pasa por la recta PQ y que es perpendicular al plano α. Cortará el plano α según la recta b. Los puntos P' y Q', simétricos de los P y Q respecto al plano α, también serán simétricos de los puntos P y Q respecto a la recta b. Efectivamente, las rectas, que son perpendiculares al plano α y que pasan por los puntos P y Q, se encuentran en el plano β y son perpendiculares a la recta b. Puesto que en el plano la simetría respecto a la recta conserva las distancias ($PQ = P'Q'$), la simetría respecto al plano en el espacio también posee esta propiedad. Por consiguiente, la simetría respecto al plano es un movimiento. Queda demostrada la afirmación.

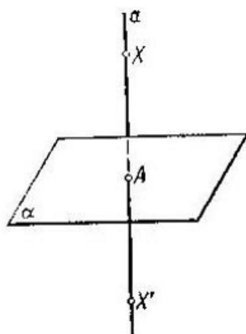


Fig. 187

La transformación de simetría respecto al punto en el espacio se define igual que en el caso del plano. Al igual que en el plano, *la transformación de simetría respecto al punto en el espacio es un movimiento*. Para demostrarlo es suficiente observar que en el espacio la transformación de simetría respecto al punto O se reduce para todo plano α que pasa por el punto O a la transformación de simetría respecto al mismo punto O en este plano.

Empleando los conceptos de simetrías respecto al plano y respecto al punto, se introducen los conceptos de *plano de simetría* y de *centro de simetría* para las figuras espaciales de la misma forma que para las figuras planas se definen los conceptos de eje de simetría y de centro de simetría.

Traslación paralela y rotación en el espacio. La traslación paralela en el espacio se define igual que la traslación paralela en el plano. Es decir, recibe el nombre de *traslación paralela* el movimiento en el que los puntos se desplazan a una misma distancia según rectas paralelas.

Igual que en el plano, *dos simetrías en el espacio realizadas sucesivamente respecto a los puntos* O_1 *y* O_2 *equivalen a la traslación paralela* en la que los puntos del espacio se desplazan a una distancia igual al duplo de la longitud del segmento O_1O_2 según las rectas paralelas a la recta O_1O_2.

Igual que en el plano, *la traslación paralela en el espacio queda perfectamente determinada al indicarse dos puntos correspondientes.*

Las demostraciones de estas propiedades de la traslación paralela en el espacio repiten al pie de la letra las demostraciones de las propiedades correspondientes de la traslación paralela en el plano. Por esta razón no las damos.

Se llama *rotación* de ángulo α alrededor de la recta a el movimiento en el que los puntos de la recta a permanecen fijos y los semiplanos limitados por la recta a giran en ángulo α, o sea, cada uno de estos semiplanos forma ángulo diedro, de arista a, igual a α con el semiplano que le corresponde. La recta a se denomina *eje de rotación* y el ángulo α, *ángulo de rotación.*

Dos reflexiones especulares, realizadas sucesivamente respecto a los planos secantes α *y* β, *equivalen a una rotación alrededor de la recta* c *según la que se cortan los planos.*

Para demostrar esta propiedad basta observar que dicha transformación se reduce en todo plano γ perpendicular a la recta c, a dos reflexiones especulares respecto a las rectas según las que el plano γ corta los planos α y β. Pero, como es sabido, dos reflexiones espaculares de esta índole equivalen a una rotación respecto al punto de intersección del plano γ y de la recta c. Queda demostrada la afirmación.

Transformación de semejanza y homotecia en el espacio. Exactamente igual que en el caso del plano, se definen en el espacio la *transformación de semejanza* y la *homotecia*, la transformación de semejanza más simple. En el espacio, la transformación de semejanza aplica rectas en rectas y planos en planos y conserva los ángulos entre rectas y planos.

La figura F' en que la transformación de semejanza aplica la figura F se denomina *semejante a* F. La figura semejante al triángulo es el triángulo semejante a éste. La razón de las distancias entre los puntos correspondientes de las figuras semejantes es la misma y coincide con el coeficiente de semejanza. La razón de las áreas de las figuras semejantes es igual al cuadrado del coeficiente de semejanza. La última afirmación, evidente para el triángulo, es, por consiguiento,

válida para cualquier figura que admita la partición en triángulos.

Proyección de un plano sobre otro. Hasta aquí hemos tratado de diferentes transformaciones del espacio en sí mismo. Consideremos ahora la importante transformación de un plano en otro, llamada *proyección*. Sean α y β dos planos cualesquiera y sea h una recta que corta cada uno de estos planos (fig. 188). Sea X un punto arbitrario del plano α. Tracemos la recta que pasa por el punto X y que es paralela a la recta h. Cortará el plano β en el punto X'. La aplicación del plano α sobre el plano β que a todo punto X hace corresponder de la forma explicada el punto X' se llama *proyección paralela* del plano α sobre el plano β. Es evidente que la proyección paralela es una aplicación biunívoca. Si las rectas que realizan la proyección son perpendiculares al plano β, la proyección se denomina *ortogonal*.

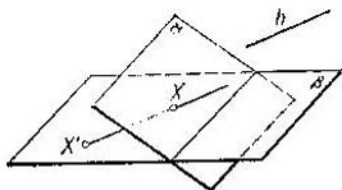


Fig. 188

La proyección paralela del plano α sobre el plano β transforma rectas en rectas y conserva el orden de los puntos en la recta. Las rectas paralelas se transforman en paralelas y las rectas secantes en rectas secantes. Se conserva la proporción entre los segmentos de una misma recta o de rectas paralelas. La demostración de estas propiedades es suficientemente sencilla y queda a cargo del lector.

Sea F una figura en el plano α. Si el punto X describe la figura F, el punto correspondiente X' de la proyección paralela describe una figura F' en el plano β. La figura F' se denomina *proyección* de la figura F.

TEOREMA 23.1. *El area de la figura F y el área de su proyección ortogonal F' verifican la relación*

$$S' = S \cos \varphi,$$

donde φ es el ángulo entre los planos a los que pertenecen la figura F y su proyección F'.

DEMOSTRACION. Nos limitaremos al caso en que la figura F puede ser dividida en triángulos. En este caso basta demostrar, obviamente, la validez del teorema para el triángulo. Sea, pues, F un triángulo. Sea α el plano al que pertenece F y sea β el plano sobre el cual se proyecta F.

Si el plano α es paralelo a β, la afirmación del teorema es evidente porque la figura F' es igual a la figura F y se obtiene de F por efecto de una traslación paralela en la dirección perpendicular a los planos.

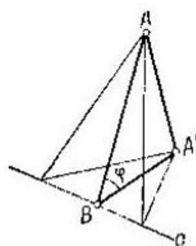


Fig. 189

Supongamos que el plano α no es paralelo al plano β y lo corta según la recta c. Sin perder generalidad, se puede aceptar que uno de los lados del triángulo F es paralelo a la recta c. Esto siempre puede ser alcanzado dividiendo el triángulo F en dos triángulos. Es más, puede aceptarse que un lado del triángulo descansa sobre la recta c. Esto se puede alcanzar pasando del plano β a un plano β' paralelo a β.

Por consiguiente, basta demostrar el teorema para el caso en que la figura es un triángulo cuya base descansa en la recta c según la que se cortan los planos α y β (fig. 189). En este caso los triángulos F y F' tienen base común que está en la recta c y sus alturas AB y $A'B$ están ligadas por la relación $A'B = AB \cos\varphi$. Para sus áreas obtenemos entonces $S' = S \cos\varphi$.

Queda demostrado el teorema.

Ejercicios

1. Sea A un punto, sea a una recta que pasa por él y sea α un plano que pasa por la recta a. El punto A divide la recta a en dos semirrectas; sea a' una de ellas. La recta a divide el plano α en dos semiplanos; sea α' uno de ellos. El plano α divide el espacio en dos semiespacios; sea E'_α uno de ellos. Construyamos del mismo modo el punto B, la semirrecta b', el semiplano β' y el semiespacio E'_β.

Demuéstrese que existe un movimiento que transforma el punto A en el B, la semirrecta a' en la b', el semiplano α' en el β' y el semiespacio E'_α en el E'_β.

2. Demuéstrese que dos transformaciones de simetría, realizadas sucesivamente respecto a los puntos O_1 y O_2, equivalen a la traslación paralela según la recta O_1O_2 a la distancia del segmento $2 \cdot O_1O_2$.

3. Demuéstrese que dos reflexiones especulares realizadas sucesivamente respecto a planos paralelos equivalen a la traslación paralela en la dirección perpendicular a estos planos y a la distancia igual al duplo de la distancia entre los planos.

4. Demuéstrese la igualdad de dos ángulos triedros si los ángulos planos de uno son iguales a los ángulos planos del otro o si los ángulos diedros de uno son iguales a los ángulos diedros del otro.

5. Demuéstrese que todo triángulo es proyección ortogonal de un triángulo regular.

El cuerpo geométrico. Sea G una figura plana. El punto X de la figura G se llama punto *interior* si todos los puntos del plano suficientemente próximos al punto X pertenecen a la figura G. Esto significa que existe un número positivo ε tal que todos los puntos del plano que están a una distancia menor que ε del punto X pertenecen a la figura G. La figura G se denomina *recinto* si todos sus puntos son interiores y cualesquiera dos de sus puntos se pueden unir mediante una quebrada que pertenece íntegramente a la figura G. Por ejemplo, el círculo sin su circunferencia es un recinto.

Sea G un recinto plano. El punto X del plano se denomina *punto frontera* del recinto G si tan cerca a X como se quiera existen puntos que pertenecen a la figura G y puntos que no le pertenecen. Esto significa que cualquiera que sea el número $\varepsilon > 0$, existen a una distancia de X menor que ε puntos que pertenecen a la figura G y puntos que no le pertenecen. Los puntos frontera forman la *frontera* del recinto G. En el ejemplo antes citado, la circunferencia del círculo consta de puntos frontera. Agregando al recinto G sus puntos frontera obtenemos una figura nueva $\bar{G}$. Se la llama *recinto cerrado*.

Los puntos interiores del polígono convexo definidos en la Planimetría constituyen un recinto. Agregándole el propio polígono obtenemos un recinto cerrado. Este recinto fue llamado polígono complementado. En el parágrafo presente y en el que sigue la palabra «polígono» se emplea en el sentido de polígono complementado.

Literalmente igual que para las figuras planas, se definen los conceptos de *punto interior* de una figura espacial, de *recinto espacial* y de su *frontera*. Huelga repetir estas definiciones. Todo recinto espacial cerrado se denomina *cuerpo*. El cuerpo cuya frontera consta de un número finito de polígonos se llama *poliedro*. Los polígonos que limitan el poliedro se denominan *caras* del mismo. El poliedro se llama *convexo* si se encuentra a un lado del plano de cada una de sus caras. Consideraremos en este parágrafo los poliedros elementales, el prisma y la pirámide.

Prisma. Sean α y α' dos planos paralelos y sea h una recta que los corta. Sea P un polígono convexo en el plano α y sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sus vértices. Tracemos por todo punto X del polígono P la recta paralela a la recta h; sea X'

el punto de su intersección con el plano α' (fig. 190). Los segmentos XX' forman un poliedro. Este poliedro se denomina *prisma*. Su frontera consta del polígono P, del polígono igual P' en el plano α' y de los paralelogramos $A_1A_2A_2'A_1'$, $A_2A_3A_3'A_2'$, . . . Los polígonos P y P' se llaman *bases* del prisma y los paralelogramos, *caras laterales*. Los segmentos A_1A_1', A_2A_2', . . . son las *aristas laterales* del prisma. El prisma se denomina *recto* si sus aristas laterales son perpendiculares a las bases. En el caso contrario, se dice que el prisma es *oblicuo*.

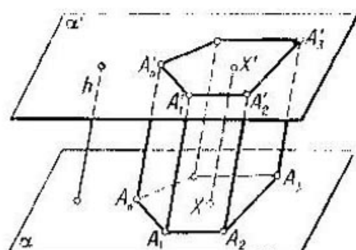


Fig. 190

Se llama *superficie lateral* del prisma (más exactamente, área de la superficie lateral) la suma de las áreas de las caras laterales. La *superficie total* del prisma consta de su superficie lateral más las áreas de sus bases.

TEOREMA 24.1. *La superficie lateral del prisma recto es igual al producto del perímetro de la base por la altura del prisma, o sea, por la longitud de sus aristas laterales.*

DEMOSTRACION. Las caras laterales del prisma recto son rectángulos. Las bases de estos rectángulos son los lados del polígono que constituye la base del prisma y sus alturas son iguales a la longitud de las aristas laterales. De aquí se deduce que la superficie lateral del prisma es igual a

$$S = a_1l + a_2l + \ldots + a_nl = pl,$$

donde p es el perímetro de la base del prisma y l es la longitud de las aristas laterales. Queda demostrado el teorema.

Paralelepípedo. El prisma se denomina *paralelepípedo* si tiene como base un paralelogramo (fig. 191). Todas las caras del paralelepípedo son paralelogramos. Se llama *diagonal* del paralelepípedo todo segmento que une dos vértices no pertenecientes a una misma cara. El paralelepípedo tiene cuatro diagonales A_1A_3', A_2A_4', A_3A_1' y A_4A_2'.

TEOREMA 24.2. *Las diagonales del paralelepípedo se cortan en un punto que las divide por la mitad.*

DEMOSTRACION. Consideremos dos diagonales cualesquiera del paralelepípedo, digamos A_1A_3' y A_4A_2' (fig. 192). Puesto que los cuadriláteros $A_1A_2A_3A_4$ y $A_2A_2'A_3'A_3$ son paralelogramos, el cuadrilátero $A_4A_1A_2'A_3'$ es también un

paralelogramo. Las diagonales $A_1A'_3$ y $A_4A'_2$ del paralelepípedo son las diagonales de este paralelogramo. Por eso, se cortan y el punto de intersección O las divide por la mitad. Análogamente se demuestra que las diagonales $A_1A'_3$ y $A_2A'_4$, así como las diagonales $A_1A'_3$ y $A_3A'_1$, se cortan y el punto de intersección las divide por la mitad. De aquí

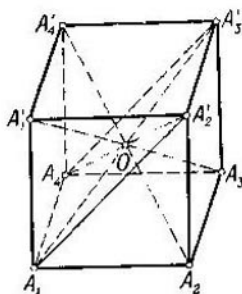


Fig. 191

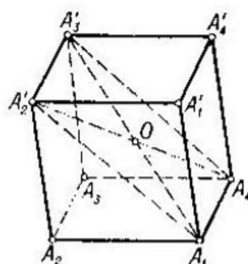


Fig. 192

resulta que las cuatro diagonales del paralelepípedo se cortan y que el punto de intersección las divide por la mitad. Queda demostrado el teorema.

Las caras del paralelepípedo sin vértices comunes se llaman opuestas.

TEOREMA 24.3. *Las caras opuestas del paralelepípedo son paralelas e iguales.*

DEMOSTRACION. Consideremos dos caras opuestas cualesquiera del paralelepípedo; por ejemplo, $A_1A_2A'_2A'_1$ y $A_3A_4A'_4A'_3$ (fig. 191). Como quiera que todas las caras del paralelepípedo son paralelogramos, la recta A_1A_2 es paralela a la recta A_3A_4 y la recta $A_1A'_1$ es paralela a la recta $A_4A'_4$. De aquí se deduce que son paralelos los planos donde están las caras consideradas del paralelepípedo (teoremas 19.1 y 19.4). Puesto que las caras del paralelepípedo son paralelogramos, resulta que todos los segmentos A_1A_4, $A'_1A'_4$, $A'_2A'_3$ y A_2A_3 son paralelos e iguales. De aquí deducimos que la cara $A_1A_2A'_2A'_1$ se superpone a la cara $A_4A_3A'_3A'_4$ por efecto de la traslación paralela según la arista A_1A_4. Por lo tanto, estas caras son iguales. Análogamente se demuestra que son paralelos e iguales los otros pares de caras opuestas del paralelepípedo. Queda demostrado el teorema.

El paralelepípedo recto cuya base es un rectángulo se denomina *paralelepípedo rectangular*. Todas sus caras son rectángulos.

Las longitudes de las aristas no paralelas del paralelepípedo rectangular se llaman *dimensiones lineales* del mismo. Todo paralelepípedo rectangular tiene tres dimensiones lineales.

TEOREMA 24.4. *En el paralelepípedo rectangular el cuadrado de cualquier diagonal es igual a la suma de los cuadrados de sus tres dimensiones lineales.*

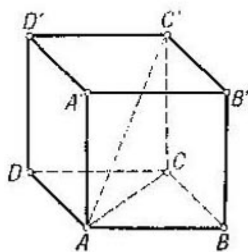


Fig. 193

DEMOSTRACION (fig. 193). Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $AC'C$, obtenemos

$$AC'^2 = AC^2 + CC'^2.$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo ACB, obtenemos $AC^2 = AB^2 + BC^2$. De aquí resulta $AC'^2 = CC'^2 + AB^2 + BC^2$. Las aristas AB, BC y CC' no son paralelas y, por consiguiente, sus longitudes son las dimensiones lineales del paralelepípedo. Queda demostrado el teorema.

Pirámide. Sea P un polígono convexo perteneciente al plano α y sea S un punto que no pertenece al plano α.

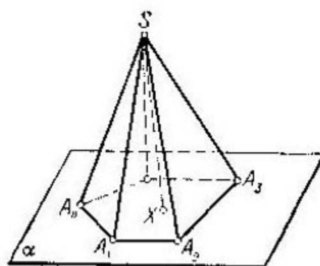


Fig. 194

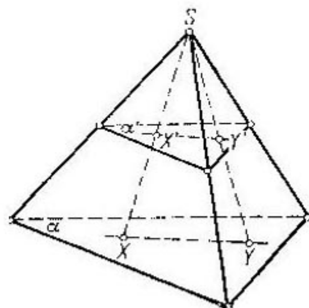


Fig. 195

Unamos el punto S con cada uno de los puntos X del polígono P mediante el segmento XS. Los segmentos XS forman un poliedro. Este poliedro se denomina *pirámide* (fig. 194). Si P es un polígono de n lados, se dice que la pirámide es

n-angular. La pirámide triángular se llama también *tetraedro*. El polígono P es la *base* de la pirámide y el punto S es el *vértice* de la misma. Se denomina *altura* de la pirámide la perpendicular bajada desde su vértice S al plano α al que pertenece su base. Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ los vértices del polígono P, base de la pirámide. Los triángulos A_1SA_2, A_2SA_3, . . . reciben, entonces, el nombre de *caras laterales* de la pirámide y los segmentos A_1S, A_2S, . . . reciben el nombre de *aristas laterales*.

TEOREMA 24.5. *Todo plano que corta la pirámide y es paralelo a su base trunca una pirámide semejante.*

DEMOSTRACION. Sea S el vértice de la pirámide, sea α el plano donde está su base y sea α' el plano secante (fig. 195). Tomemos dos puntos cualesquiera X e Y en la base de la pirámide. El plano α' corta los segmentos XS e YS en los puntos X' e Y'. Las rectas XY y $X'Y'$ son paralelas porque se hallan en un mismo plano (el plano del triángulo XYS) y no se cortan. Por el teorema demostrado en la Planimetría, son iguales las razones $\frac{X'S}{XS}$ e $\frac{Y'S}{YS}$, o sea, la razón $\frac{X'S}{XS} = k$ no depende del punto X elegido. De aquí se deduce que la pirámide que trunca el plano secante α' se obtiene de la pirámide inicial mediante una homotecia respecto al punto S siendo k el coeficiente de homotecia; pero las figuras homotéticas son semejantes. Queda demostrado el teorema.

La pirámide se llama *regular* si su base es un polígono regular y si el pie de la altura coincide con el centro de este polígono. Es evidente que las aristas laterales de la pirámide regular son iguales y que, por ende, sus caras laterales son triángulos isósceles iguales. La altura de la cara lateral de la pirámide regular trazada desde su vértice recibe el nombre de *apotema*.

Se denomina *superficie lateral* de la pirámide la suma de las áreas de sus caras laterales.

TEOREMA 24.6. *La superficie lateral de la pirámide regular es igual al producto del semiperímetro de la base por el apotema.*

DEMOSTRACION. Si el lado de la base es a y el número de los lados es n, la superficie lateral de la pirámide es $\frac{al}{2} n = \frac{an}{2} l = \frac{p}{2} l$, donde l es el apotema y p es el perímetro de la base. Queda demostrado el teorema.

Según el teorema 24.5, el plano α', que es paralelo al plano α de la base de la pirámide y que corta la pirámide, trunca una pirámide semejante. La otra parte, que también representa un poliedro, se denomina *pirámide truncada* fig. 196). Las caras de la pirámide truncada pertenecientes a los planos paralelos α y α' son las *bases de ésta*; las demás caras se denominan *caras laterales.* Las bases de la pirámide truncada representan polígonos semejantes (incluso homotéticos) y las caras laterales son trapecios. Si la pirámide truncada ha sido obtenida de una pirámide regular, también se la llama *regular*. Las caras laterales de la pirámide truncada regular son trapecios isósceles; las alturas de éstos se denominan *apotemas.*

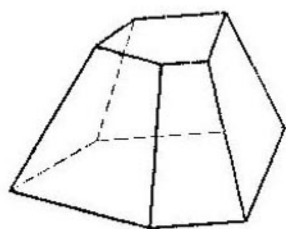


Fig. 196

TEOREMA 24.7. *La superficie lateral de la pirámide truncada regular es igual al producto de la semisuma de los perímetros de sus bases por el apotema.*

La demostración de este teorema (basada en el teorema 24.6) queda a cargo del lector.

Poliedros regulares. El poliedro convexo se llama *regular* si sus caras son polígonos regulares de un mismo número de lados y si en todo vértice del poliedro converge un mismo número de aristas.

Las caras del poliedro regular son triángulos equiláteros, cuadrados o pentágonos regulares. Efectivamente, a partir del hexágono regular, los ángulos internos no son menores que 120° y, como quiera que en todo vértice del poliedro convergen como mínimo tres aristas, resulta que la suma de los ángulos planos del ángulo poliedro correspondiente a cualquier vértice del poliedro regular no sería menor que $3 \cdot 120° = 360°$; pero esto es imposible, pues la suma de los ángulos planos de cualquier ángulo poliedro convexo es menor que 360°.

Si las caras del poliedro regular son triángulos regulares, en todo vértice del poliedro no pueden converger más de cinco aristas. Efectivamente, si son más, la suma de los ángulos planos relativos al vértice del poliedro no será menor que 360°, cosa imposible. Por consiguiente, en un poliedro regular de caras triangulares el número de aristas

convergentes en un mismo vértice puede ser sólo tres, cuatro o cinco. Estas tres posibilidades efectivemente tienen lugar. Los poliedros correspondientes son el *tetraedro*, el *octaedro* y el *icosaedro* regulares (fig. 197). En todo vértice del tetraedro concurren tres aristas, del octaedro cuatro y del icosaedro cinco.

Si las caras del poliedro regular son cuadrados, el número de aristas convergentes en todo vértice del poliedro no

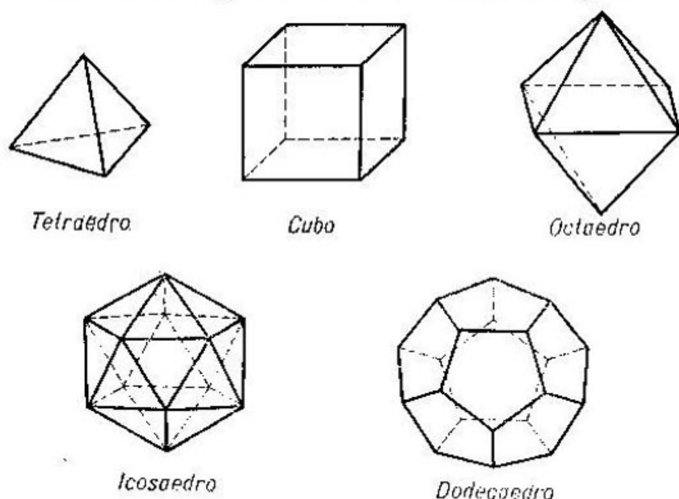


Fig. 197

es mayor que tres y, por consiguiente, es igual a tres. El poliedro correspondiente es el *cubo* (fig. 197).

Si las caras del poliedro son pentágonos regulares, en todo vértice también convergen tres aristas solamente. El poliedro correspondiente es el *dodecaedro regular* (fig. 197).

En todo poliedro regular son iguales todos los ángulos diedros. Si en el vértice del poliedro concurren tres aristas, la demostración es sencilla. Efectivamente, los ángulos diedros del ángulo triedro se determinan unívocamente por los ángulos planos. Si en el vértice del poliedro concurren cuatro o cinco aristas, como ocurre en el octaedro y en el icosaedro, es mucho más difícil demostrar la igualdad de los ángulos diedros del poliedro. No daremos esta demostración.

Ejercicios

1. Demuéstrese que los centros de las caras del cubo son vértices de un octaedro regular y que los centros de las caras del dodecaedro regular son vértices de un icosaedro regular.

2. Demuéstrese que las diagonales cruzadas de dos caras paralelas del cubo son aristas de un tetraedro regular.

3. Hállense los ángulos diedros del dodecaedro regular.

4. Demuéstrese que la superficie lateral de la pirámide, cuya base es de área S y cuyos ángulos diedros relativos a la base son α, es igual a $\frac{S}{\cos\alpha}$.

5. Demuéstrese la igualdad de dos tetraedros $ABCD$ y $A_1B_1C_1D_1$ si sus aristas correspondientes son iguales, o sea, si $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, etc.

6. Las aristas cruzadas del tetraedro son iguales. Demuéstrese que son iguales todas las caras del tetraedro.

§ 25. ELEMENTOS DE DELINEACIÓN PROYECTIVA

Representación del punto en el diseño. Toda figura espacial se representa en el plano proyectándola mediante rectas paralelas. La proyección de la figura sobre el plano no da, generalmente, la idea completa de la figura. Por ello se emplean dos o incluso tres proyecciones sobre dos o tres, respectivamente, planos. Veamos cómo se representa la figura mediante la proyección ortogonal sobre dos planos.

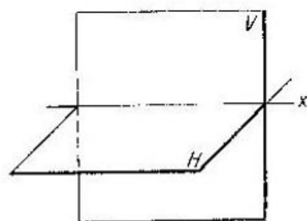


Fig. 198

Sean H y V dos planos que se cortan en ángulo recto según la recta x (fig. 198). Por razones de comodidad, aceptaremos que el plano H es *horizontal* y que el plano V es *vertical*. La figura se proyecta ortogonalmente sobre los planos H y V. La proyección de la figura sobre el plano horizontal se denomina *proyección horizontal* y la proyección sobre el plano vertical es la *proyección vertical*. Los propios planos H y V se llaman *planos de proyección* y la recta x, según la que éstos se cortan, lleva el nombre de *eje de proyección*. Realizada la proyección de la figura sobre los planos H y V, imprimamos al plano horizontal H una rotación de 90° sobre el eje x hasta sobreponerlo al plano vertical V. Ambas proyecciones aparecerán, entonces, en un mismo plano. El dibujo así obtenido con ambas proyec-

ciones de la figura se denomina *diseño*. Veamos la posición que tienen en el diseño las proyecciones horizontal y vertical de un punto cualquiera. Tiene lugar la propiedad siguiente.

25.1 *Las proyecciones horizontal y vertical del punto se representan en el diseño por puntos pertenecientes a una recta perpendicular al eje de proyección.*

DEMOSTRACION. Tracemos el plano α que pasa por el punto considerado A y que es perpendicular al eje de proyección x. Cortará los planos H y V según las rectas a_1 y a_2 (fig. 199). La proyección horizontal A_1 del punto A se halla en la recta a_1 porque la perpendicular trazada desde el punto A al plano H está en el plano α. Análogamente, la proyección vertical A_2 del punto se encuentra en la recta a_2. Las rectas a_1 y a_2 son perpendiculares a la recta x. Como quiera que la rotación, igual que todo movimiento en general, conserva los ángulos, las rectas a_1 y a_2 coinciden al coincidir, por efecto de rotación, los planos H y V. Por consiguiente, las proyecciones del punto A se representan en el diseño por puntos de la recta a_2.

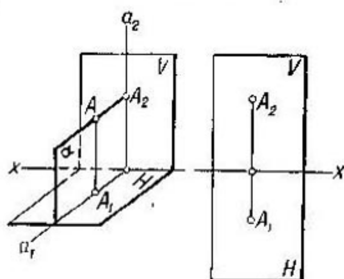


Fig. 199

Problemas de recta. PROBLEMA 25.2. *Conociéndose en el diseño las proyecciones de la recta a y la proyección horizontal del punto A perteneciente a la recta a, hállese la proyección vertical del punto A.*

SOLUCION. Sean a_1 y a_2 las proyecciones horizontal y vertical de la recta a y sea A_1 la proyección horizontal del punto A (fig. 200). La proyección vertical del punto A se halla en la recta que es perpendicular al eje de proyección y que pasa por el punto A_1 y en la proyección vertical a_2 de la recta a, o sea, es el punto de intersección de estas rectas.

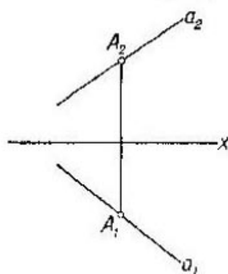


Fig. 200

PROBLEMA 25.3. *Conociéndose en el diseño las proyecciones de la recta a y del punto A que no le pertenece, constrúyanse las proyecciones de la recta que pasa por el punto A y que es paralela a la recta a.*

SOLUCION. Puesto que las proyecciones de rectas paralelas son paralelas, las proyecciones pedidas se obtienen trazando por las proyecciones del punto A las rectas paralelas a las proyecciones correspondientes de la recta a (fig. 201).

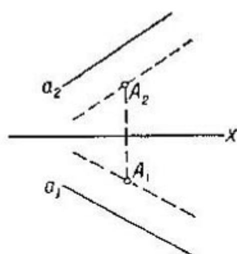


Fig. 201

Determinación de la longitud del segmento. PROBLEMA 25.4. *Hállese la longitud del segmento AB a partir de sus proyecciones en el diseño.*

SOLUCION. Si el segmento AB es paralelo a uno de los planos de proyección, por ejemplo, al plano vertical, su longitud es igual a la longitud de su proyección sobre dicho plano. El paralelismo entre el segmento AB y el plano vertical se determina en el diseño por su proyección horizontal que ha de ser paralela al eje de proyección.

Supongamos que el segmento AB no es paralelo a ninguno de los planos de proyección. Hagamos girar el segmento AB sobre la recta que proyecta su extremo A en el plano horizontal. Las proyecciones del extremo B del segmento se desplazarán: la proyección horizontal del punto B se desplazará según la semicircunferencia de centro en el punto A_1, mientras que la proyección vertical se desplazará según la recta b_2 que es paralela al eje de proyección y que pasa por el punto B_2 (fig. 202).

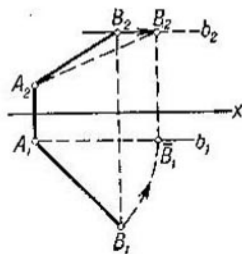


Fig. 202

Cuando el segmento ocupe la posición paralela al plano vertical, la proyección B_1 llegará a la recta que pasa por el punto A_1 y que es paralela al eje de proyección. Sea $\overline{B}_1$ el punto B_1 en esta posición. El segmento $A_1\overline{B}_1$ es la proyección horizontal de un segmento igual a AB y paralelo al plano vertical. No ofrece dificultad hallar su proyección vertical $A_2\overline{B}_2$. La proyección vertical del extremo B del segmento girado es la intersección de la recta b_2 y de la recta que pasa por el punto $\overline{B}_1$ y que es perpendicular al eje de proyección. Como hemos explicado anteriormente, el segmento AB es igual al segmento $A_2\overline{B}_2$.

Problemas de recta y plano. Sean H y V los planos de proyección y sea α un plano que corta los planos H y V según las rectas h y v respectivamente (fig. 203). Las rectas h y v se llaman *trazas del plano* α en los planos de proyección. Más exactamente, se dice que h es la *traza horizontal* y que v es la *vertical*.

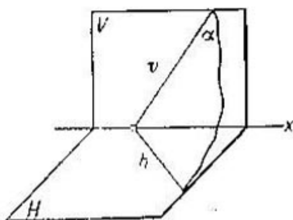


Fig. 203

Las trazas del plano se cortan en el eje de proyección o son paralelas al eje si el propio plano es paralelo a este eje. Si el plano es paralelo a uno de los planos de proyección, tiene una sola traza: la vertical si el plano es paralelo al plano horizontal o la horizontal si es paralelo al plano vertical. En el diseño el plano se representa por sus trazas.

PROBLEMA 25.5. *Conociéndose las trazas de dos planos, hállese la recta de intersección de los mismos, o sea, determínense las proyecciones de esta recta.*

SOLUCIÓN. Sean α y β los planos considerados, sean a_1 y a_2 las trazas del plano α y sean b_1 y b_2 las trazas del plano β (fig. 204). La recta c según la que se cortan los planos α y β corta el plano vertical en el punto P. Su proyección vertical P_2 es el punto de intersección de las trazas verticales de los planos, o sea, de las rectas a_2 y b_2, mientras que su proyección horizontal P_1 está en el eje de proyección.

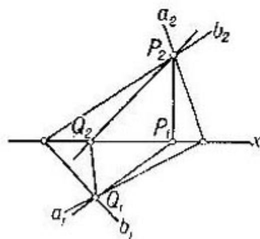


Fig. 204

Análogamente, la recta c corta el plano horizontal en el punto Q. Su proyección horizontal Q_1 es el punto de intersección de las trazas horizontales a_1 y b_1 y su proyección vertical Q_2 está en el eje de proyección. Las proyecciones de la recta c se obtienen uniendo los puntos Q_2 y P_2 (proyección vertical) y los puntos P_1 y Q_1 (proyección horizontal).

PROBLEMA 25.6. *Conociéndose en el diseño las proyecciones de la recta, hállense las trazas del plano que pasa por esta recta y que es perpendicular a un plano de proyección determinado; por ejemplo,* H.

SOLUCIÓN. Puesto que el plano es perpendicular al

plano H, su traza horizontal coincide con la proyección horizontal de la recta considerada y su traza vertical es perpendicular al eje de proyección. Para obtener la traza vertical hay que construir la recta que es perpendicular al eje de proyección y que pasa por el punto de intersección del eje y de la proyección horizontal de la recta (fig. 205).

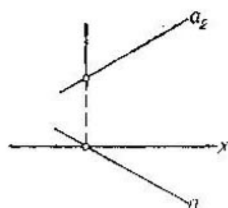


Fig. 205

PROBLEMA 25.7. *Conociéndose las proyecciones de la recta y las trazas del plano, hállese el punto de intersección de la recta y del plano, o sea, hállense las proyecciones de este punto.*

SOLUCION. Consideremos el plano que pasa por la recta y que es perpendicular a H (problema 25.6). Hallemos la recta h según la que se cortan éste y el plano dado (problema 25.5). Construyamos análogamente la recta v de intersección del plano dado y del plano que pasa por la recta dada y que es perpendicular al plano vertical. Las proyecciones del punto buscado son los puntos de intersección de las proyecciones correspondientes de las rectas h y v.

PROBLEMA 25.8. *Conociéndose las proyecciones de dos rectas secantes y la proyección horizontal de un punto que se encuentra en el plano determinado por esas rectas, hállese la proyección vertical de este punto.*

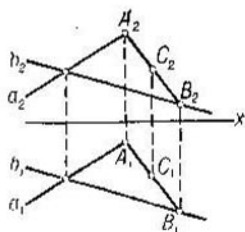


Fig. 206

SOLUCION. Tracemos una recta que pasa por la proyección horizontal C_1 del punto y que corta las proyecciones horizontales a_1 y b_1 de las rectas secantes (fig. 206). Sean A_1 y B_1 los puntos de intersección. Tracemos por los puntos A_1 y B_1 las rectas perpendiculares al eje de proyección. Sean A_2 y B_2 los puntos de intersección de estas rectas con las proyecciones verticales respectivas de las rectas secantes. Los segmentos A_1B_1 y A_2B_2 son las proyecciones horizontal y vertical de un segmento cuyos extremos se encuentran en las rectas secantes. De aquí resulta que la proyección vertical C_2 del punto buscado se obtiene en la intersección del segmento A_2B_2 y de la recta que pasa por el punto C_1 y que es perpendicular al eje de proyección.

Ejercicios

1. Conociéndose en el diseño las proyecciones de dos rectas, determínese si se cortan o no.
2. Conociéndose en el diseño las trazas del plano y las proyecciones del punto, determínese si éste se halla o no en el plano.
3. Conociéndose en el diseño las proyecciones de dos rectas secantes, constrúyanse las trazas del plano que éstas determinan.
4. Constrúyase el triángulo a partir de sus proyecciones en el diseño.
5. Conociéndose la proyección vertical del cuadrilátero y las proyecciones horizontales de tres vértices del mismo, constrúyase la proyección horizontal del cuarto vértice.

§ 26. VOLÚMENES DE CUERPOS SIMPLES

Concepto del volumen. El problema de la determinación del volumen de los cuerpos se remonta a la antigüedad. Surgió en relación con la actividad práctica del hombre.

Imaginemos dos recipientes: uno cúbico y otro de forma arbitraria (fig. 207). Supongamos que ambos han sido llenados de líquido empleándose para el primero m kg de líquido y n kg para el segundo. Lo natural es considerar que el segundo recipiente es $\frac{n}{m}$ veces mayor que el primero. Llamaremos *volumen* del *segundo recipiente* el número que indica cuántas veces es mayor que el primero. El primer recipiente es la *unidad de medición*. De esta definición del volumen se obtienen las siguientes propiedades del mismo. Primero, puesto que para llenar todo recipiente se necesita una cantidad determinada de líquido, resulta que *todo recipiente posee un volumen (positivo) determinado*. Segundo, para llenar recipientes iguales se necesita la misma cantidad de líquido y, por eso, *los recipientes iguales tienen volumen igual*. Tercero, si dividimos el recipiente en dos partes, la cantidad de líquido necesaria para llenar todo el recipiente constará de las cantidades de líquido necesarias para llenar sus partes. Por ello, *el volumen de todo el recipiente es igual a la suma de los volúmenes de sus partes*.

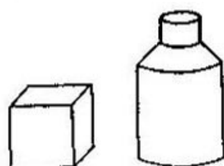


Fig. 207

Ateniéndonos a esta definición, para hallar el volumen de un recipiente es preciso llenarlo de líquido. Pero, en la práctica el problema debe ser resuelto precisamente en el sentido inverso. Se exige conocerla cantidad de líquido necesaria para llenar el recipiente sin proceder a llenarlo. Si conociésemos el volumen del recipiente, podríamos determinar esta cantidad de líquido multiplicando el volumen por la cantidad de líquido necesaria para llenar una unidad de volumen. ¿Cómo determinar, pues, el volumen del recipiente?

Ahora demostraremos que las tres propiedades señaladas del volumen lo determinan completamente y encontraremos las fórmulas que permiten calcular el volumen de los cuerpos simples.

Un cuerpo se llama *simple* si puede ser dividido en un número finito de tetraedros, o sea, de pirámides triangulares. En particular, son cuerpos simples, por ejemplo, el prisma, la pirámide y, en general, el poliedro convexo.

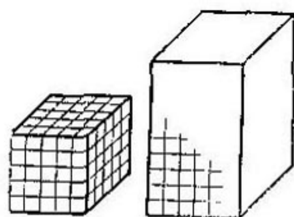


Fig. 208

Volumen del paralelepípedo rectangular. Determinemos primero el volumen del paralelepípedo rectangular. En la fig. 208 se representa un cubo como unidad de medición y un paralelepípedo rectangular cuyo volumen debe ser medido.

Dividamos las aristas del cubo que arrancan de un mismo vértice en N partes iguales y tracemos por los puntos de división planos perpendiculares a estas aristas. El cubo quedará dividido en N^3 cubos pequeños. En la figura, las aristas del cubo han sido divididas en cinco partes cada una. El número de los cubos pequeños es de $25 \times 5 = 5^3$.

Determinemos el volumen del cubo pequeño. Por la propiedad del volumen, el volumen del cubo grande es igual a la suma de los volúmenes de los cubos pequeños. Puesto que el volumen del cubo grande es igual a la unidad y que el número de cubos pequeños es igual a N^3, el volumen del cubo pequeño es igual a $\frac{1}{N^3}$. Sea q la arista del cubo pequeño. Entonces, $q = \frac{1}{N}$ y, por consiguiente, el volumen del cubo pequeño es $\frac{1}{N^3} = q^3$.

Construyamos en las aristas del paralelepípedo, que arrancan de un mismo vértice, segmentos iguales a q, $2q$, $3q$, ... y tracemos por sus extremos planos perpendiculares a las aristas del paralelepípedo. Obtendremos un conjunto de cubos de aristas iguales a q que llenan el paralelepípedo. Determinemos el número de cubos que contiene el paralelepípedo y el número de cubos en que está contenido el paralelepípedo.

Sean a, b y c las aristas del paralelepípedo. Indiquemos mediante l el entero de la división de a por q, mediante m el entero de la división de b por q y mediante n el entero de la división de c por q. Entonces, el número de cubos que contiene el paralelepípedo será lmn, mientras que el número de cubos en que está contenido el paralelepípedo no será mayor que $(l+1)(m+1)(n+1)$. De aquí resulta que el volumen V del paralelepípedo está comprendido entre los números $lmnq^3$ y $(l+1)(m+1)(n+1)q^3$, o sea,

$$lmnq^3 \leqslant V < (l+1)(m+1)(n+1)q^3.$$

Demostremos ahora que el producto abc está comprendido entre estos mismos números. Efectivamente, se tiene $lq \leqslant a < (l+1)q$, $mq \leqslant b < (m+1)q$ y $nq \leqslant c < (n+1)q$. Por eso,

$$lmnq^3 \leqslant abc < (l+1)(m+1)(n+1)q^3.$$

Puesto que ambos números, V y abc, están comprendidos entre los números $lmnq^3$ y $(l+1)(m+1)(n+1)q^3$, difieren a lo sumo en $(l+1)(m+1)(n+1)q^3 - lmnq^3$, o sea, en $lmq^3 + mnq^3 + lnq^3 + lq^3 + mq^3 + nq^3 + q^3$ todo lo más. Como quiera que $lq \leqslant a$, $mq \leqslant b$ y $nq \leqslant c$, de aquí se deduce que V y abc difieren no más que en $abq + bcq + acq + aq^2 + bq^2 + cq^2 + q^3$. Este número es todo lo pequeño que se quiera si es suficientemente pequeño el número $q = \frac{1}{N}$. Resulta que la diferencia entre los números V y abc es tan pequeña como se quiera. Pero esto puede darse sólo si son iguales.

Por consiguiente, *el volumen del paralelepípedo rectangular de dimensiones lineales a, b y c es $V = abc$.* Aquí a, b y c se miden con la arista del cubo que se ha tomado como unidad de medición del volumen.

Volumen del paralelepípedo oblicuo. Determinemos el volumen del paralelepípedo oblicuo (fig. 209, a la izquierda).

Tracemos el plano que pasa por la arista BC y que es perpendicular a la base $ABCD$ y agreguemos al paralelepípedo el prisma triangular $BB_1B_2CC_1C_2$. Separemos ahora del cuerpo obtenido un prisma triangular trazando el plano que pasa por la arista AD y que es perpendicular a la base $ABCD$. Obtendremos de nuevo un paralelepípedo. Su volumen es igual al volumen del paralelepípedo inicial. Efectivamente, el prisma agregado y el prisma separado se superponen por efecto de la traslación paralela determinada por el

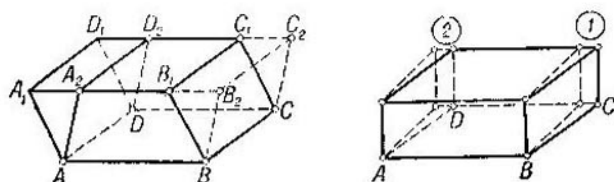


Fig. 209

segmento AB y, por consiguiente, tienen volúmenes iguales. Al realizar con el paralelepípedo las transformaciones señaladas, el área de su base y su altura se conservan. También se conservan los planos de dos caras laterales, mientras que las otras dos se hacen perpendiculares a la base. Aplicando una vez más esta transformación, obtendremos un paralelepípedo de caras laterales perpendiculares a la base, o sea, un paralelepípedo recto. Transformémoslo análogamente en un paralelepípedo rectangular agregándole el prisma 1 y quitándole el prisma 2 (fig. 209, a la derecha). Esta transformación conserva también el volumen, el área de la base y la altura del paralelepípedo.

El volumen del paralelepípedo rectangular es igual al producto de sus dimensiones lineales. El producto de dos dimensiones lineales es el área de su base y la tercera dimensión es su altura. Por consiguiente, el volumen del paralelepípedo rectangular es igual al producto del área de su base por la altura. Puesto que en la transformación descrita del paralelepípedo inicial en paralelepípedo rectangular se conservan en cada una de las fases el volumen, el área de la base y la altura, resulta que el volumen del paralelepípedo inicial es igual al producto del área de su base por la altura.

Por lo tanto, *el volumen de todo paralelepípedo es igual al producto del área de su base por la altura.*

Volumen del prisma. Determinemos el volumen del prisma. Consideremos primero el prisma triangular (fig. 210). Complementémoslo hasta obtener un paralelepípedo como se indica en la figura. El punto O es el centro de simetría del paralelepípedo. Por eso, el prisma agregado es simétrico del inicial respecto al punto O y, por consiguiente, su volumen es igual al volumen del prisma inicial. O sea, el volumen del paralelepípedo construido es el doble del volumen del prisma.

El volumen del paralelepípedo es igual al producto del área de su base por la altura. El área de la base es igual al área duplicado del triángulo ABC y la altura es igual a la

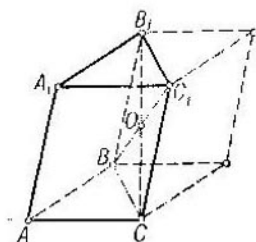


Fig. 210

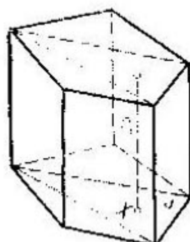


Fig. 211

altura del prisma inicial. De aquí deducimos que el volumen del prisma inicial es igual al producto del área de su base por la altura.

Consideremos ahora un prisma cualquiera (fig. 211). Dividamos su base en triángulos. Sea $\triangle$ uno de ellos. Tracemos la recta que pasa por un punto cualquiera X del triángulo $\triangle$ y que es paralela a las aristas laterales. Sea a_X el segmento de esta recta perteneciente al prisma. Si el punto X describe el triángulo $\triangle$, los segmentos a_X forman un prisma triangular. Construyendo tal prisma para todo triángulo $\triangle$, lograremos dividir el prisma inicial en triangulares. Todos estos prismas tienen una misma altura igual a la altura del prisma inicial.

El volumen del prisma inicial es igual a la suma de los volúmenes de los prismas triangulares que lo componen. Según lo demostrado, el volumen del prisma triangular es igual al producto del área de su base por la altura. De aquí se deduce que el volumen del prisma inicial es $V = S_1H + S_2H + \ldots + S_nH = (S_1 + S_2 + \ldots + S_n) H$, donde

S_1, S_2, ..., S_n son las áreas de los triángulos △ en que ha sido dividida la base del prisma. Pero la suma de las áreas de los triángulos △ es igual al área S de la base del prisma inicial. Por eso,

$$V = SH.$$

Por consiguiente, *el volumen de todo prisma es igual al producto del área de su base por la altura.*

Volumen de la pirámide. Lo natural para determinar el volumen de la pirámide sería tratar de complementarla con pirámides iguales hasta obtener un paralelepípedo y de esta forma, conociendo el volumen del paralelepípedo, hallar el volumen de la pirámide. Pero esto no puede hacerse en el caso general. Por eso, emplearemos otro procedimiento.

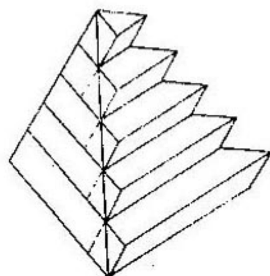


Fig. 212

Dividamos la altura de la pirámide en n partes iguales y tracemos por los puntos de división planos paralelos a la base de la pirámide (fig. 212). La pirámide quedará dividida entonces en capas. Construyamos para cada una de estas capas dos prismas: uno conteniendo la capa y otro contenido en la capa, como representa la figura.

El poliedro P_1, formado por la pila de prismas que contienen las capas respectivas, contiene también la propia pirámide y, por lo tanto, su volumen es mayor que el de la pirámide. El poliedro P_2, formado por la pila de prismas contenidas en las capas respectivas, está contenido en la propia pirámide y, por eso, su volumen es menor que el de la pirámide. Sea V el volumen de la pirámide y sean V_1 y V_2 los volúmenes de los poliedros construidos P_1 y P_2. Entonces,

$$V_2 < V < V_1.$$

Determinemos los volúmenes de los poliedros P_1 y P_2. Las secciones de la pirámide correspondientes a los planos paralelos a la base son semejantes a ésta. Por eso, el área de la base del prisma m-ésimo en el poliedro P_1 será $S\left(\frac{m}{n}\right)^2$, donde S es el área de la base de la pirámide y $\frac{m}{n}$ es el coefi-

ciente de semejanza. El volumen del prisma respectivo será $S\left(\frac{m}{n}\right)^2\frac{H}{n}$ y el volumen del poliedro P_1, igual a la suma de los volúmenes de los prismas que lo componen, será

$$V_1 = S\frac{H}{n}\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{n}{n}\right)^2\right\} = \frac{SH}{n^3}(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2).$$

Análogamente determinamos el volumen V_2 del poliedro P_2

$$V_2 = S\frac{H}{n}\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right\} = \frac{SH}{n^3}(1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2).$$

Como se sabe, $1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$ y, por eso, $1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2 = \frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$. Por consiguiente,

$$V_1 = \frac{SH}{n^3}\left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right) = SH\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right) \text{ y}$$

$$V_2 = \frac{SH}{n^3}\left(\frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right) = SH\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right).$$

Luego,

$$SH\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right) < V < SH\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right).$$

De aquí

$$SH\left(-\frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right) < V - \frac{SH}{3} < SH\left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right).$$

De esta desigualdad se ve que los números V y $\frac{SH}{3}$ difieren en $\frac{SH}{n}$ todo lo más. Puesto que n es arbitrario y, por lo tanto, puede ser tomado tan grande como se quiera, los números V y $\frac{SH}{3}$ difieren todo lo poco que se quiera. Pero esto puede darse sólo si $V = \frac{SH}{3}$. O sea, *el volumen de toda pirámide triangular es igual a un tercio del producto del área*

de su base por la altura:

$$V = \frac{1}{3} SH.$$

Consideremos ahora una pirámide no triangular cualquiera. Dividamos su base en triángulos $\triangle_1, \triangle_2, \ldots, \triangle_n$. La pirámide considerada se compone de aquellas pirámides que tienen como bases estos triángulos y como vértice el vértice de la pirámide considerada. El volumen de ésta es igual a la suma de los volúmenes de las pirámides que la componen. Puesto que todas ellas tienen la misma altura H que la pirámide considerada, el volumen de la última es $V = \frac{1}{3} H (S_1 + S_2 + \ldots + S_n) = \frac{1}{3} HS$.

Por consiguiente, *el volumen de toda pirámide es igual a un tercio del producto del área de su base por la altura.*

Volúmenes de los cuerpos semejantes. Sean T y T' dos cuerpos simples semejantes. Esto significa que existe una transformación de semejanza que aplica el cuerpo T en el cuerpo T'. Sea k el coeficiente de semejanza.

Dividamos el cuerpo simple T en las pirámides triangulares $P_1, P_2, \ldots, P_n$. El volumen del cuerpo T es igual a la suma de los volúmenes de estas pirámides. La transformación de semejanza que aplica el cuerpo T en el cuerpo T' transforma las pirámides $P_1, P_2, \ldots, P_n$ en las pirámides $P'_1, P'_2, \ldots, P'_n$. Estas últimas componen el cuerpo T' y, por eso, el volumen del cuerpo T' es igual a la suma de los volúmenes de las pirámides $P'_1, P'_2, \ldots, P'_n$.

Como quiera que las pirámides P'_i y P_i son semejantes y que el coeficiente de semejanza es k, resulta que la razón de sus alturas es k y la razón de las áreas de sus bases es k^2. Por consiguiente, la razón de los volúmenes de estas pirámides es k^3. Puesto que el cuerpo T está formado por las pirámides P_i y el cuerpo T' por las pirámides P'_i, la razón de los volúmenes de los cuerpos T' y T es también k^3.

El número k, coeficiente de semejanza, es igual a la razón de las distancias entre dos pares de puntos correspondientes en la transformación de semejanza. Este número es igual, pues, a la razón de dos cualesquiera dimensiones lineales correspondientes de los cuerpos T' y T. Llegamos a la conclusión siguiente.

Los volúmenes de dos cuerpos simples semejantes son uno al otro como los cubos de sus dimensiones lineales correspondientes.

Empleemos este resultado para determinar el volumen de la pirámide truncada. Demostremos que para el volumen de la pirámide truncada es válida la fórmula siguiente:

$$V=\frac{1}{3}H\left(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2\right),$$

donde S_1 y S_2 son las áreas de las bases de la pirámide y H es su altura.

Complementemos la pirámide truncada hasta obtener una pirámide completa de altura H_1. Sea S_1 el área de su base. Indiquemos la altura de la pirámide complementaria por H_2 y el área de su base por S_2. Como quiera que las dos pirámides son semejantes, las áreas de sus bases son una a la otra como los cuadrados de las alturas y los volúmenes como los cubos de las alturas, o sea, $\frac{S_2}{S_1}=\left(\frac{H_2}{H_1}\right)^2$ y $\frac{V_2}{V_1}=\left(\frac{H_2}{H_1}\right)^3$. Tenemos

$$V=V_1-V_2=V_1\left(1-\frac{V_2}{V_1}\right)=V_1\left[1-\left(\frac{H_2}{H_1}\right)^3\right]=$$

$$=V_1\left(1-\frac{H_2}{H_1}\right)\left[1+\frac{H_2}{H_1}+\left(\frac{H_2}{H_1}\right)^2\right]=$$

$$=V_1\left(1-\frac{H_2}{H_1}\right)\left(1+\sqrt{\frac{S_2}{S_1}}+\frac{S_2}{S_1}\right)=$$

$$=\frac{V_1}{H_1S_1}(H_1-H_2)\left(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2\right).$$

Puesto que $H_1-H_2=H$ y $V_1=\frac{1}{3}H_1S_1$, resulta que

$$V=\frac{1}{3}H\left(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2\right).$$

Queda demostrada la fórmula del volumen de la pirámide truncada.

Exactitud de la definición del volumen de los cuerpos simples. El volumen del cuerpo simple se determina sumando los volúmenes de las pirámides triangulares que lo componen. Pero existen diversos modos de dividir el cuerpo simple en pirámides triangulares y diversos modos de elegir la base de la pirámide al calcular su volumen. Por ello, surgen las preguntas.

1. ¿Depende el volumen de la pirámide triangular del modo de elegir su base?

2. ¿Depende el volumen del cuerpo simple del modo de dividirlo en pirámides triangulares?

Si la respuesta a ambas preguntas es negativa, nuestra definición del volumen es, como suele decirse, *exacta* o *correcta*.

Demostremos primero que el volumen de la pirámide triangular no depende de qué cara se tome por base. Sea $DABC$ una pirámide triangular (fig. 213). Sean α, β y γ los ángulos planos del ángulo triedro en el vértice D de la pirámide. Más concretamente, sea α el ángulo BDC, sea β el ángulo ADC y sea γ el ángulo ADB. Sean a, b y c los ángulos diedros relativos a las aristas del ángulo triedro de vértice D. Más concretamente, sea a el ángulo relativo a la arista DA, sea b el ángulo relativo a la arista DB y sea c el ángulo relativo a la arista DC.

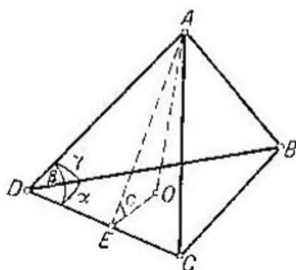


Fig. 213

Tracemos desde el vértice A la perpendicular AE a la recta DC y la perpendicular AO al plano de la cara BDC. Aceptemos que la cara BCD es la base de la pirámide. Entonces, el área de la base es

$$S=\frac{1}{2}DB\cdot DC\cdot \operatorname{sen}\alpha.$$

La altura de la pirámide es $H = AO = AE \operatorname{sen} c = DA \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen} c$. Por consiguiente, el volumen de la pirámide es

$$V=\frac{1}{6}DA\cdot DB\cdot DC\cdot \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen} c.$$

Tomando como base de la pirámide la cara ADB, de la misma forma obtenemos para el volumen de la pirámide la expresión

$$V=\frac{1}{6}DA\cdot DB\cdot DC\cdot \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\gamma \operatorname{sen} b.$$

Las dos expresiones obtenidas para el volumen de la pirámide difieren en los factores $\operatorname{sen}\beta \operatorname{sen} c$ y $\operatorname{sen}\gamma \operatorname{sen} b$. Estos factores son iguales. Efectivamente, aplicando el teo-

rema de los senos al ángulo triedro de vértice D, tenemos $\frac{\text{sen}\,\beta}{\text{sen}\,b}=\frac{\text{sen}\,\gamma}{\text{sen}\,c}$, de donde $\text{sen}\,\beta\,\text{sen}\,c = \text{sen}\,\gamma\,\text{sen}\,b$.

Por consiguiente, *el volumen de la pirámide triangular no depende de qué cara de la pirámide se toma por base de la misma.*

Pasemos a la segunda pregunta. Tomemos una pirámide triangular y dividámosla en pirámides triangulares pequeñas. Demostremos que el volumen de la pirámide, determinado según la fórmula $V = \frac{1}{3} SH$, es igual a la suma de los volúmenes de las pirámides que la componen calculados según la misma fórmula. Consideremos primero el caso de la partición especial de la pirámide en que las pirámides que la componen tienen el mismo vértice que ésta y sus bases dividen la base de la pirámide considerada. Si las áreas de las bases de las pirámides son S_1, S_2, . . ., S_n, la suma de sus volúmenes

$$V=\frac{S_1H}{3}+\frac{S_2H}{3}+\ldots+\frac{S_nH}{3}=$$

$$=\frac{1}{3}(S_1+S_2+\ldots+S_n)H=\frac{1}{3}SH$$

es efectivamente igual al volumen de la pirámide considerada.

Consideremos ahora una partición cualquiera de la pirámide triangular $ABCD$ en pirámides triangulares pequeñas $PQRS$. Aceptemos que dos pirámidas cualesquiera de esta partición no tienen puntos comunos, tienen un vértice común, tienen una arista común o tienen una cara común.

El volumen de la pirámide $PQRS$ se puede representar como la suma algebraica de los volúmenes de cuatro pirámides $AQRS$, $PARS$, $PQAS$ y $PQRA$. Estas pirámides se obtienen de la pirámide $PQRS$ tomando en lugar de uno de sus vértices el vértice A de la pirámide considerada. El signo de los sumandos en la suma algebraica mencionada se determina a tenor con la regla siguiente. Si el vértice sustituido por el vértice A está al mismo lado que el punto A respecto al plano de la cara opuesta, el sumando lleva el signo «+»; en el caso contrario, se toma el signo «—». Si al sustituir un vértice por el vértice A los cuatro puntos aparecen en un mismo plano, el sumando se omite, o sea, su volumen se considera igual a cero.

Representando el volumen de cada una de las pirámides de nuestra partición como suma algebraica de los volúmenes de pirámides de vértice A, sumemos los volúmenes de todas las pirámides de la partición. Obtendremos así la suma algebraica de pirámides $AXYZ$, donde XYZ es una cara de una pirámide de nuestra partición. Si la cara XYZ está en el interior de la pirámide inicial, el volumen de la pirámide $AXYZ$ aparecerá en la suma dos veces, pues la cara XYZ pertenece en este caso exactamente a dos pirámides de la partición. Como quiera que estas pirámides se encuentran a distintos lados de la cara común XYZ, el volumen de la pirámide $AXYZ$ aparecerá una vez con el signo «+» y la segunda vez con el signo «—». Por consiguiente, estos sumandos se reducirán.

Si la cara XYZ pertenece a la cara BCD de la pirámide inicial, el volumen de la pirámide $AXYZ$ aparecerá en la suma sólo una vez y, además, llevando el signo «+». Finalmente, si la cara XYZ pertenece a cualquiera de las tres caras restantes de la pirámide inicial, el volumen de la pirámide $AXYZ$ será simplemente igual a cero. En resumen, la suma de los volúmenes de las pirámides de nuestra partición será igual a la suma de los volúmenes de aquellas pirámides $AXYZ$ cuyas caras XYZ se encuentran en la cara BCD de la pirámide inicial. Pero hemos demostrado ya que esta suma es igual al volumen de la pirámide inicial.

Supongamos ahora que un cuerpo simple ha sido dividido primero en pirámides $P'_1, P'_2, P'_3, \ldots$ y después en pirámides $P''_1, P''_2, P''_3, \ldots$ Demostremos que son iguales las sumas de los volúmenes de las pirámides de ambas particiones.

Las pirámides de ambas particiones, consideradas conjuntamente, realizan una partición de nuestro cuerpo en poliedros convexos. Cada uno de estos poliedros es la parte común de una pirámide de la primera partición y de una pirámide de la segunda partición. Dividamos estos poliedros convexos en pirámides menores $P'''_1, P'''_2, P'''_3, \ldots$ haciendo que dos pirámides cualesquiera no tengan puntos comunes, tengan un vértice común, tengan una arista común o tengan una cara común. Semejante partición es siempre posible.

Según hemos demostrado, el volumen de toda pirámide de la primera partición es igual a la suma de los volúmenes de las pirámides P'''_k que la componen. Igualmente, el volumen de toda pirámide de la segunda partición es igual a una suma de los volúmenes de pirámides P'''_k. Por esto, la suma

de los volúmenes de las pirámides tanto de la primera como de la segunda partición será igual a la suma de los volúmenes de todas las pirámides P_k'''. Es decir, en ambas particiones la suma de los volúmenes de las pirámides es la misma, o sea, el volumen del cuerpo simple no depende del modo de dividirlo en pirámides triangulares.

Ejercicios

1. Demuéstrese que el plano que pasa por una arista del tetraedro y que divide la arista opuesta en razón $m : n$, divide el volumen del tetraedro en la misma razón.

2. Sea α un plano que corta las aristas del tetraedro convergentes en un mismo vértice y que las divide en razones respectivas $\frac{m}{n}$, $\frac{p}{q}$ y $\frac{r}{s}$ contando desde el vértice común. Demuéstrese que el volumen del tetraedro que el plano α trunca del tetraedro inicial es igual a

$$\left(\frac{m}{m+n}\right)\left(\frac{p}{p+q}\right)\left(\frac{r}{r+s}\right)V,$$

donde V es el volumen del tetraedro inicial.

3. Demuéstrese que el volumen del tetraedro no varía si sus aristas opuestas se deslizan según dos rectas cruzadas.

4. El plano α es perpendicular a las aristas laterales del prisma y no corta sus bases. Demuéstrese que el volumen del prisma es igual al producto de la longitud de las aristas laterales por el área de la sección del prisma correspondiente al plano α.

5. Hállese el volumen del paralelepípedo si se conocen sus aristas a, b y c, convergentes en un mismo vértice, y los ángulos α, β y γ que estas aristas forman.

§ 27. CUERPOS DE REVOLUCIÓN

Cilindro. Sean α y α' dos planos paralelos y sea a una recta que los corta. Tomemos un círculo cualquiera k en el plano α (fig. 214). Tracemos la recta que pasa por un punto X cualquiera del círculo k y que es paralela a la a; sea a_X el segmento de esta recta comprendido entre los planos α y α'. Si el punto X describe el círculo k, los segmentos a_X forman un cuerpo. Este cuerpo recibe el nombre de *cilindro circular*.

La frontera del cilindro circular consta del círculo k, del círculo igual k' en el plano α' y de la *superficie lateral*. La superficie lateral del cilindro es la descrita por el segmento a_X cuando el punto X recorre la circunferencia del círculo k. En este caso los segmentos a_X se denominan *generatrices del cilindro*. Los círculos k y k' son las *bases del cilindro*.

El cilindro circular se llama *recto* si sus generatrices son perpendiculares a las bases. Consideraremos solamente cilindros circulares rectos. Por eso, omitiremos en lo sucesivo las palabras «recto» y «circular».

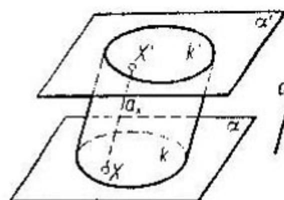


Fig. 214

La recta que pasa por el centro de la base del cilindro y que es paralela a sus generatrices se denomina *eje del cilindro*. La sección del cilindro correspondiente a todo plano que contiene el eje del cilindro se llama *sección principal*. Todo plano que pasa por una generatriz del cilindro y que es perpendicular a la sección principal correspondiente a esta generatriz se llama *plano tangente* al cilindro.

TEOREMA 27.1. *Todo plano paralelo al eje del cilindro no corta la superficie lateral del cilindro, la corta según dos generatrices o es tangente al cilindro.*

Todo plano perpendicular al eje del cilindro corta su superficie lateral según una circunferencia igual a la circunferencia de la base.

DEMOSTRACIÓN. Comencemos por la primera afirmación. Sea α un plano paralelo al eje del cilindro (fig. 215). La proyección ortogonal de la superficie lateral sobre el plano de la base del cilindro es la circunferencia $\varkappa$ de la base. La proyección del plano α es la recta a por donde se cortan el plano α y el plano de la base. Si la recta a no corta la circunferencia $\varkappa$, el plano α tampoco corta la superficie lateral del cilindro. Si la recta a corta la circunferencia $\varkappa$ en dos puntos P y Q, la intersección del plano α y de la superficie lateral consta de dos generatrices con extremos en los puntos P y Q. Finalmente, si la recta a es tangente a la circunferencia $\varkappa$, el plano α es tangente al cilindro según la generatriz que arranca del punto de tangencia de la recta a y de la circunferencia $\varkappa$.

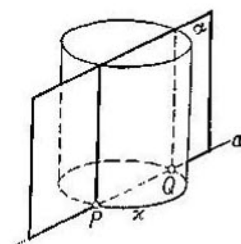


Fig. 215

Sea ahora β un plano perpendicular al eje del cilindro. Este plano es paralelo a las bases. La traslación paralela según el eje del cilindro que superpone el plano β al plano de la base del cilindro, superpone también la sección de la

superficie lateral correspondiente al plano β y la circunferencia de la base del cilindro. Queda demostrado el teorema.

Si los planos de las bases del prisma coinciden con los planos de la base del cilindro y las aristas laterales del primero son generatrices del segundo, se dice que el prisma

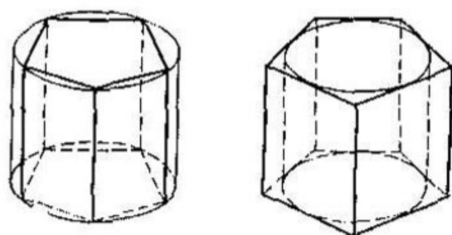


Fig. 216

está *inscrito* en el cilindro (fig. 216, a la izquierda). Si los planos de las bases del prisma son planos de las bases del cilindro y las caras del primero son planos tangentes a la superficie lateral del segundo, se dice que el prisma está *circunscrito* al cilindro (fig. 216, a la derecha).

Cono. Sean α un plano y S un punto que no le pertenece. Tomemos en el plano α un círculo cualquiera k (fig. 217). Unamos un punto cualquiera X del círculo con el punto S mediante el segmento XS. Si el punto X describe el círculo k, los segmentos XS forman un cuerpo. Este cuerpo recibe el nombre de *cono circular*. La frontera del cono consta del círculo k, *base del cono*, y de la *superficie lateral*. La superficie lateral del cono es la descrita por el segmento XS cuando el punto X se desplaza según la circunferencia del círculo k. El punto S se llama *vértice del cono*. Los segmentos XS que unen el vértice del cono con los puntos de la circunferencia de la base se denominan *generatrices del cono*.

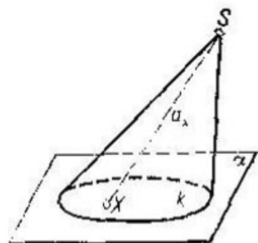


Fig. 217

Se dice que el cono circular es *recto* si la proyección ortogonal de su vértice en el plano de la base coincide con el centro de ésta. En este caso, la recta que pasa por el vértice

del cono y que es perpendicular a la base se denomina *eje del cono.* Consideraremos solamente conos circulares rectos. Por eso, omitiremos para abreviar las palabras «recto» y «circular».

La sección del cono correspondiente a todo plano que pasa por su eje se llama *sección principal.* Todo plano que pasa por una generatriz del cono y que es perpendicular a la sección principal correspondiente a esta generatriz se denomina *plano tangente.*

TEOREMA 27.2. *Todo plano que pasa por el vértice del cono no tiene otros puntos comunes con el cono, corta su superficie lateral según dos generatrices o es tangente al cono.*

Todo plano perpendicular al eje del cono lo corta según un círculo y corta la superficie lateral según una circunferencia de centro en el eje del cono.

DEMOSTRACION. Sea α un plano que pasa por el vértice del cono y que corta el plano de la base según la recta a (fig. 218). Si la recta a corta la circunferencia de la base en dos puntos P y Q, el plano α corta la superficie lateral según las generatrices PS y QS. Si la recta a es tangente a la circunferencia de la base, el plano α es tangente al cono. Si el plano α no corta la circunferencia, no tiene más puntos comunes con el cono que el vértice.

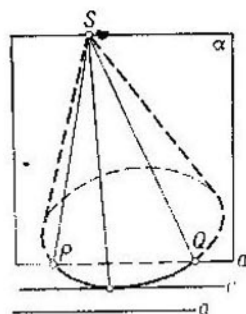


Fig. 218

Sea ahora β un plano que es perpindicular al eje del cono y que lo corta. La transformación de homotecia respecto al vértice del cono que aplica el plano β en el plano de la base, aplica la sección del cono correspondiente al plano β en la base del cono. Es decir, la sección del cono correspondiente al plano β es un círculo y la sección correspondiente de la superficie lateral es una circunferencia de centro en el eje del cono. Queda demostrado el teorema.

Si la base de la pirámide es un polígono inscrito en la circunferencia de la base del cono y el vértice de la primera coincide con el vértice del segundo, se dice que la pirámide está *inscrita* en el cono (fig. 219, a la izquierda). Las aristas laterales de la pirámide inscrita en el cono son generatrices de éste. Si la base de la pirámide es un polígono circunscrito

a la circunferencia de la base del cono y el vértice de la primera coincide con el vértice del segundo, se dice que la pirámide está *circunscrita* al cono (fig. 219, a la derecha). Las caras laterales de la pirámide circunscrita son planos tangentes al cono.

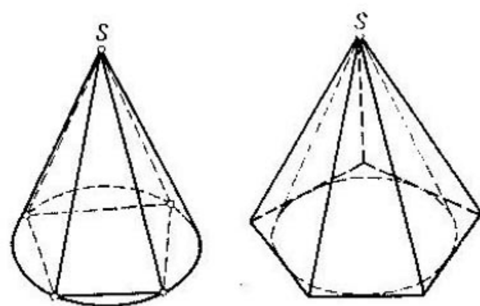


Fig. 219

Esfera. Sea O un punto cualquiera y sea R un número positivo arbitrario. Se llama *esfera* al cuerpo formado por todos aquellos puntos del espacio que no distan más de R del punto O. El punto O es el *centro de la esfera* y el número R es el *radio de la esfera*. La frontera de la esfera se denomina *superficie esférica*. Por lo tanto, los puntos de la superficie esférica son aquellos puntos de la esfera que están respecto al centro a una distancia igual al radio. El segmento que une el centro de la esfera con cualquier punto de la superficie esférica también se denomina *radio*. El segmento que une dos puntos de la superficie esférica y que pasa por el centro de la esfera se llama *diámetro*. Los extremos de todo diámetro se denominan puntos *diametralmente opuestos* de la esfera.

TEOREMA 27.3. *Toda sección de la esfera correspondiente a un plano es un círculo. El centro de este círculo es el pie de la perpendicular trazada desde el centro de la esfera al plano secante.*

DEMOSTRACION. Sea α el plano secante y sea O el centro de la esfera (fig. 220). Tracemos desde el centro de la esfera la perpendicular al plano α y sea O' el pie de esta perpendicular. Sea X un punto cualquiera de la esfera perteneciente al plano α. Por el teorema de Pitágoras tenemos $(OX)^2 = (OO')^2 + (O'X)^2$. Puesto que OX no es mayor que el

radio R de la esfera, resulta $O'X \leqslant \sqrt{R^2 - (OO')^2}$, o sea, todo punto de la sección de la esfera correspondiente al plano α está a una distancia no mayor que $\sqrt{R^2 - (OO')^2}$ del punto O' y, por ende, pertenece al círculo de centro O' y de radio $\sqrt{R^2 - (OO')^2}$. Recíprocamente, cualquier punto X de este círculo pertenece a la esfera. Esto significa precisamente que la sección de la esfera correspondiente al plano α es un círculo de centro en el punto O'. Queda demostrado el teorema.

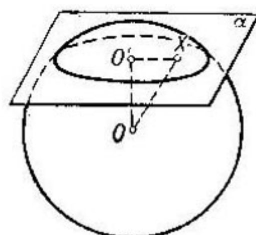


Fig. 220

De esta demostración se deduce que el radio del círculo que se obtiene en la sección de la esfera correspondiente al plano α es

$$R' = \sqrt{R^2 - (OO')^2}.$$

De aquí se ve que el círculo de la sección correspondiente al plano α será tanto mayor cuanto más próximo esté el plano α al centro de la esfera, o sea, cuanto menor sea OO'. El mayor círculo se obtiene en la sección correspondiente al plano que pasa por el centro de la esfera. El radio de este círculo es igual al radio de la esfera. *Los planos equidistantes del centro de la esfera la cortan según círculos iguales.*

Todo plano que pasa por el centro de la esfera se denomina *plano diametral.*

TEOREMA 27.4. *Todo plano diametral de la esfera es plano de simetría de la misma. El centro de la esfera es centro de simetría.*

DEMOSTRACION. Sea α un plano diametral y sea X un punto cualquiera de la esfera (fig. 221). Construyamos el punto X' simétrico de X respecto al plano α. El segmento XX' es perpendicular al plano α y lo corta en su punto medio (punto A). De la igualdad de los triángulos rectángulos OAX y OAX' se deduce que $OX' = OX$. Puesto que $OX \leqslant R$, también $OX' \leqslant R$, o sea, el punto simétrico del punto X pertenece a la esfera. Queda demostrada la primera afirmación.

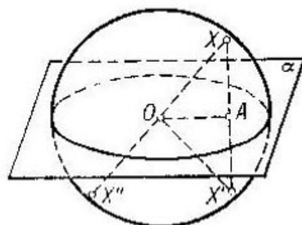


Fig. 221

Sea ahora X'' el punto simétrico del punto X respecto al centro de la esfera. Entonces, se tiene $OX'' = OX \leqslant R$, o sea, el punto X'' pertenece a la esfera. Queda demostrado completamente el teorema.

Toda sección de la esfera correspondiente al plano que pasa por su centro recibe el nombre de *círculo máximo*.

TEOREMA 27.5. *Por dos puntos no diametralmente opuestos de la superficie esférica se puede trazar una circunferencia correspondiente a un círculo máximo, y sólo una.*

DEMOSTRACION. Sea O el centro de la esfera y sean A y B dos puntos no diametralmente opuestos de su superficie (fig. 222). Tracemos por los puntos A, O y B el plano α. El plano α corta la esfera según un círculo máximo. La circunferencia de este círculo pasa por los puntos A y B.

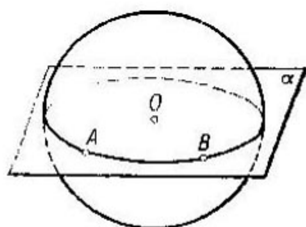


Fig. 222

No puede existir otra circunferencia que pase por los puntos A y B y que sea circunferencia correspondiente a un círculo máximo. Efectivamente, el plano α' de este círculo máximo tendría que pasar por los puntos A, B y O. Pero como los puntos A, B y O no están sobre una recta, existe sólo un plano que pasa por ellos, el plano α. Queda demostrado el teorema.

TEOREMA 27.6. *Las circunferencias de dos círculos máximos cualesquiera se cortan en dos puntos diametralmente opuestos.*

Efectivamente, los planos correspondientes a estos círculos máximos tienen un punto común (centro de la esfera) y, por consiguiente, se cortan según una recta que pasa por el centro de la esfera. Los puntos en los que esta recta corta la superficie esférica, son los puntos de intersección de las circunferencias de dichos círculos máximos. Queda demostrado el teorema.

El plano que pasa por el punto A de la superficie esférica y que es perpendicular al radio que va al punto A se denomina *plano tangente*. El punto A se llama entonces *punto de tangencia*.

TEOREMA 27.7. *Todo plano tangente a la esfera tiene sólo un punto común con la esfera, el punto de tangencia.*

DEMOSTRACION Sea α el plano tangente a la esfera y sea A el punto de tangencia (fig. 223). Tomemos en el plano α un punto cualquiera X distinto de A. Como quiera que OA es perpendicular y OX es oblicua, se tiene $OX > OA = R$. Por consiguiente el punto X no pertenece a la esfera. Queda demostrado el teorema.

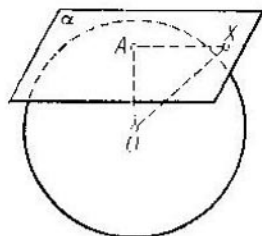


Fig. 223

Toda recta que pasa por el punto A de la superficie esférica y que es perpendicular al radio trazado a este punto se denomina *tangente*.

TEOREMA 27.8. *Por todo punto A de la superficie esférica pasan infinitas tangentes; todas ellas están en el plano tangente a la esfera.*

Efectivamente, sea α el plano tangente a la esfera en el punto A (fig. 223). Toda recta del plano α que pasa por el punto A es perpendicular al radio OA y, por ende, es una tangente. Cualquier tangente que pasa por el punto A es perpendicular al radio OA y, por consiguiente, ha de pertenecer al plano α. Queda demostrado el teorema.

Ejercicios

1. Demuéstrese que los planos que pasan por el eje del cilindro son planos de simetría del mismo.
2. Demuéstrese que el cilindro es un cuerpo de revolución, o sea, que cualquier rotación alrededor del eje del cilindro lo hace coincidir consigo mismo.
3. Demuéstrese que están en dos planos perpendiculares las intersecciones de dos cilindros iguales de ejes secantes.
4. Demuéstrese que los puntos medios de los segmentos paralelos, cuyos extremos pertenecen a la superficie lateral del cilindro, están en un plano que pasa por el eje del cilindro.
5. Demuéstrese que el cono es un cuerpo de revolución, o sea, que toda rotación alrededor del eje del cono lo hace coincidir consigo mismo.
6. Demuéstrese que el área lateral del cono es igual a $\frac{S}{\cos\alpha}$, donde S es el área de la base del cono y α es el ángulo entre la base y las generatrices.
7. Demuéstrese que los puntos medios de los segmentos paralelos, cuyos extremos pertenecen a la superficie lateral del cono, están en un plano que pasa por el vértice del cono.
8. Demuéstrese que es una superficie esférica el lugar geométrico de los pies de las perpendiculares trazadas desde el punto A a los planos que pasan por el punto B.

9. Demuéstrese que es un círculo máximo el lugar geométrico de los puntos medios de los segmentos paralelos cuyos extremos están en la superficie esférica.

10. Demuéstrese que la intersección de dos superficies esféricas es una circunferencia.

11. Demuéstrese que el cuerpo es una esfera si todo plano que pasa por un punto O del cuerpo es plano de simetría del mismo.

§ 28. VOLÚMENES DE CUERPOS DE REVOLUCIÓN

Definición general del volumen. En el § 26 hemos considerado el volumen del cuerpo simple, o sea, del cuerpo que admite la partición en un número finito de pirámides triangulares. El volumen de este cuerpo es la suma de los volúmenes de las pirámides triangulares que lo componen. El volumen de la pirámide triangular se determina según la fórmula $V = \frac{1}{3} SH$. Ahora, partiendo de los volúmenes de los cuerpos simples, definiremos el concepto del volumen de un cuerpo cualquiera.

Se da el nombre de *volumen* del cuerpo T al número V que posee las propiedades siguientes:

1) *el número V no es mayor que el volumen de cualquier cuerpo simple en que está contenido el cuerpo T*;

2) *no existe ningún número mayor que V que posee la propiedad* 1).

Por consiguiente el número V es el mayor de los números con la propiedad 1). En el caso de cuerpo simple, esta definición conduce al mismo resultado que antes, pues el cuerpo considerado se encuentra entre los cuerpos simples que lo contienen.

Indiquemos algunas propiedades del volumen que se desprenden directamente de su definición.

Si el cuerpo T_1 está contenido en el cuerpo T_2, el volumen del cuerpo T_1 no es mayor que el volumen del cuerpo T_2. Efectivamente, todo cuerpo simple en que está contenido el cuerpo T_2 también contiene el cuerpo T_1. Por eso, su volumen no es menor que el volumen V_1 del cuerpo T_1. Pero el volumen V_2 del cuerpo T_2 es el mayor de los números con esta propiedad. Por consiguiente, $V_1 \leqslant V_2$.

Si los cuerpos T_1 y T_2 son iguales, sus volúmenes también lo son. Efectivamente, si el cuerpo T_1 encuentra cabida en un cuerpo simple T_1', el cuerpo T_2 encuentra cabida en el cuerpo simple T_2' igual a T_1'. Por esto, V_2 no es mayor que

el volumen de cualquier cuerpo simple en el que está contenido el cuerpo T_1. Pero V_1 es el mayor de los números con esta propiedad. Por consiguiente, $V_2 \leqslant V_1$. Cambiando los papeles de los cuerpos T_1 y T_2, obtenemos la desigualdad opuesta $V_1 \leqslant V_2$. Por lo tanto, $V_1 = V_2$.

Si los cuerpos T_1 y T_2 son semejantes, sus volúmenes son uno al otro como los cubos de las dimensiones lineales correspondientes.

Efectivamente, si el cuerpo T_1 encuentra cabida en un cuerpo simple de volumen x, el cuerpo T_2 encuentra cabida en el cuerpo semejante de volumen k^3x, donde k es el coeficiente de semejanza. Entonces, $V_2 \leqslant k^3x$. Por consiguiente, $\frac{V_2}{k^3} \leqslant x$. Es decir, el número $\frac{V_2}{k^3}$ es menor que el volumen de cualquier cuerpo simple en el que está contenido el cuerpo T_1. El número V_1 es el mayor de los números con esta propiedad. Por lo tanto, $V_1 \geqslant \frac{V_2}{k^3}$. Cambiando los papeles de los cuerpos T_1 y T_2, obtenemos la desigualdad opuesta $V_1k^3 \leqslant \leqslant V_2$. De aquí deducimos que $V_2 = k^3V_1$, o sea, que $\frac{V_2}{V_1} = = k^3$.

Si el cuerpo es dividido por un plano o por una superficie cilíndrica, cónica o esférica, el volumen del cuerpo es igual a la suma de los volúmenes de los cuerpos en los que está dividido.

La demostración de este teorema se basa en que toda porción finita de plano o de superficie cilíndrica, cónica o esférica puede ser encerrada en un cuerpo simple de volumen tan pequeño como se quiera. Para el plano esto es obvio. Basta tomar un cuadrado que contenga la porción considerada del plano y construir un paralelepípedo cuya base sea este cuadrado y cuya altura sea suficientemente pequeña. Para el caso de las otras superficies demostraremos esta afirmación en los puntos que siguen.

Supongamos, para puntualizar, que una superficie cilíndrica divide el cuerpo T en dos cuerpos T_1 y T_2. Sean V_1 y V_2 sus volúmenes y sea V el volumen del cuerpo T.

Sea ε un número positivo pequeño. Construyamos un cuerpo simple T_1' de volumen no mayor que $V_1 + \varepsilon$ en el que esté contenido el cuerpo T_1. Tal cuerpo existe; de lo contrario, los volúmenes de todos los cuerpos simples que contienen T_1 no serían menores que $V_1 + \varepsilon$ y, por consiguiente, el volumen del cuerpo T_1 tampoco sería menor que $V_1 + \varepsilon$,

cosa imposible. Construyamos un cuerpo simple T_2' de volumen no mayor que $V_2 + \varepsilon$ en el que esté contenido el cuerpo T_2. El volumen del cuerpo simple T', compuesto de los cuerpos T_1' y T_2', no será mayor que $V_1 + V_2 + 2\varepsilon$. El cuerpo T' contiene el cuerpo T. Por eso, el volumen del cuerpo T no será mayor que el volumen del cuerpo T'. Es decir, $V \leqslant V_1 + V_2 + 2\varepsilon$. Puesto que ε es un número positivo cualquiera de esta desigualdad resulta que $V \leqslant \leqslant V_1 + V_2$.

Construyamos ahora un cuerpo simple T' de volumen no mayor que $V + \varepsilon$ en el que esté contenido el cuerpo T. La superficie cilíndrica divide el cuerpo T' en dos cuerpos T_1' y T_2'. Construyamos el cuerpo simple S' de volumen ε como máximo que contenga la frontera común de los cuerpos T_1' y T_2'. Agregando el cuerpo S' a los cuerpos T_1' y T_2', obtenemos los cuerpos simples T_1'' y T_2'' a los que pertenecen los cuerpos T_1 y T_2. La suma de los volúmenes de los cuerpos T_1'' y T_2'' es $V + 2\varepsilon$ todo lo más. Por consiguiente, $V_1 + + V_2 \leqslant V + 2\varepsilon$. Puesto que ε es tan pequeño como se quiera, resulta que $V_1 + V_2 \leqslant V$. Comparando las desigualdades obtenidas, deducimos que $V_1 + V_2 = V$ que es lo que se quería demostrar.

Volumen del cilindro. TEOREMA 28.1. *El volumen del cilindro es igual al producto del área de su base por la altura.*

DEMOSTRACION. Construyamos un prisma n-angular regular inscrito en el cilindro y un prisma n-angular regular circunscrito al cilindro. El prisma inscrito está contenido en el cilindro y, por consiguiente, su volumen no es mayor que el volumen del cilindro. El prisma circunscrito contiene el cilindro y, por ende, su volumen no es menor que el volumen del cilindro.

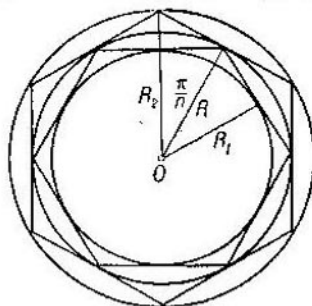


Fig. 244

Consideremos la circunferencia inscrita en la base del prisma inscrito (fig. 224). El radio de esta circunferencia es $R_1 = = R\cos\frac{\pi}{n}$. El área de la base del prisma inscrito no es menor que el área del círculo de radio R_1 contenido en aquélla. Por eso, el volumen del prisma inscrito en el

cilindro no es menor que $\pi R^2 H \cos^2 \frac{\pi}{n}$, donde H es la altura del cilindro. O sea, para el volumen del cilindro tenemos

$$V \geqslant \pi R^2 H \cos^2 \frac{\pi}{n} .$$

Consideremos ahora la circunferencia circunscrita a la base del prisma circunscrito. El radio de esta circunferencia es $R_2 = \frac{R}{\cos \frac{\pi}{n}}$. La base del prisma circunscrito está contenida en el círculo de radio R_2. Por eso, el área de la base del prisma no es mayor que $\frac{\pi R^2}{\cos^2 \frac{\pi}{n}}$. Para el volumen del cilindro tenemos entonces

$$V \leqslant \frac{\pi R^2 H}{\cos^2 \frac{\pi}{n}} .$$

Las dos desigualdades obtenidas son válidas para cualquier valor de n. Para $n \to \infty$, se tiene $\cos \frac{\pi}{n} \to 1$. Por eso, de la primera desigualdad se deduce que $V \geqslant \pi R^2 H$ y de la segunda que $V \leqslant \pi R^2 H$. Es decir,

$$V = \pi R^2 H$$

que es lo que se quería demostrar.

Observemos que omitiendo del prisma circunscrito el inscrito, obtenemos un cuerpo simple que contiene la superficie lateral del cilindro. El volumen de este cuerpo es igual a la diferencia entre los volúmenes de los prismas, o sea, es igual a

$$\pi R^2 H \left(\frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{n}} - \cos^2 \frac{\pi}{n} \right) .$$

Si $n \to \infty$, este volumen tiende a cero. De aquí deducimos que toda porción finita de la superficie cilíndrica puede ser encerrada en un cuerpo simple de volumen tan pequeño como se quiera.

Volumen del cono. TEOREMA 28.2. *El volumen del cono es igual a un tercio del producto del área de su base por la altura.*

DEMOSTRACION. Construyamos una pirámide n-angular regular inscrita en el cono y una pirámide n-angular regular circunscrita al cono. La pirámide inscrita está contenida en el cono y, por consiguiente, su volumen no es mayor que el volumen del cono. La pirámide circunscrita contiene el cono y, por ende, su volumen no es menor que el volumen del cono.

Consideremos la circunferencia inscrita en la base de la pirámide inscrita (fig. 224). El radio de esta circunferencia es $R_1 = R \cos \frac{\pi}{n}$. El área de la base de la pirámide inscrita no es menor que el área del círculo de radio R_1 contenido en aquélla. Por eso, el volumen de la pirámide inscrita en el cono no es menor que $\frac{1}{3} \pi R^2 H \cos^2 \frac{\pi}{n}$, donde H es la altura del cono. O sea, para el volumen del cono se tiene

$$V \geqslant \frac{1}{3} \pi R^2 H \cos^2 \frac{\pi}{n}.$$

Consideremos ahora la circunferencia circunscrita a la base de la pirámide circunscrita. El radio de esta circunferencia es $R_2 = \frac{R}{\cos \frac{\pi}{n}}$. La base de la pirámide circunscrita está contenida en el círculo de radio R_2. Por eso, el área de la base de la pirámide no es mayor que $\frac{\pi R^2}{\cos^2 \frac{\pi}{n}}$. Para el volumen del cono tenemos entonces

$$V \leqslant \frac{1}{3} \frac{\pi R^2 H}{\cos^2 \frac{\pi}{n}}.$$

Las dos desigualdades obtenidas son válidas para cualquier valor de n. Si $n \to \infty$, se tiene $\cos \frac{\pi}{n} \to 1$. Por eso, de la primera desigualdad se deduce que $V \geqslant \frac{1}{3} \pi R^2 H$ y de la segunda que $V \leqslant \frac{1}{3} \pi R^2 H$. Por consiguiente,

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 H$$

que es lo que se quería demostrar.

Observemos que omitiendo de la pirámide circunscrita la inscrita, obtenemos un cuerpo simple que contiene la superficie lateral del cono. El volumen de este cuerpo es igual a la diferencia entre los volúmenes de las pirámides, o sea, es igual a

$$\frac{1}{3}\pi R^2 H\left(\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{n}}-\cos^2\frac{\pi}{n}\right).$$

Si $n \to \infty$, este volumen tiende a cero. De aquí deducimos que toda porción finita de la superficie cónica puede ser encerrada en un cuerpo simple de volumen tan pequeño como se quiera.

TEOREMA 28.3. *El volumen del cono truncado con bases de radios R_1 y R_2 y de altura H se determina según la fórmula*

$$V=\frac{1}{3}\pi H\,(R_1^2+R_1R_2)+R_2^2).$$

La demostración de esta fórmula se basa en las mismas consideraciones que en el caso de la pirámide truncada. No la daremos.

Volumen de la esfera. TEOREMA 28.4. *El volumen de la esfera de radio R es*

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

DEMOSTRACION. El plano que pasa por el centro de la esfera la divide en dos partes iguales, dos semiesferas. Por eso, basta determinar el volumen de la semiesfera. Para

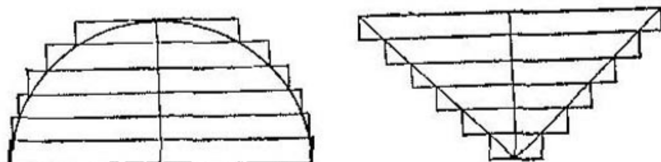


Fig. 225

mayor comodidad, aceptaremos que la semiesfera ocupa la posición indicada en la fig. 225. Tracemos el radio perpendicular a la base de la semiesfera y dividámoslo en n partes iguales. Tracemos por los puntos de división los planos paralelos a la base de la semiesfera. La dividirán en n capas (fig. 225, a la izquierda). Construyamos para toda

capa el cilindro que la contiene de radio igual al radio de la base inferior de la capa y de altura igual a la altura de la capa. Sea V_m el volumen del m-ésimo cilindro contando desde la base de la semiesfera.

El cuerpo formado por los cilindros construidos contiene la semiesfera y, por ello, su volumen no es menor que el volumen de ésta. Si hacemos descender todos los cilindros a la distancia $\frac{R}{n}$, todos quedarán dentro de la semiesfera a excepción del primero. Por eso, el volumen del cuerpo formado por todos estos cilindros menos el primero no es mayor que el volumen de la semiesfera. Indicando por V el volumen de la semiesfera, obtenemos de esta forma la desigualdad

$$V_2 + V_3 + \ldots + V_n \leqslant V \leqslant \leqslant V_1 + V_2 + \ldots + V_n. \quad (1)$$

Tomemos ahora el cono de radio R en la base y de altura también R. Dividámoslo en capas de la misma forma que la semiesfera y construyamos para cada capa el cilindro que la contiene (fig. 225, a la derecha). Sea V'_m el volumen del m-ésimo cilindro contando desde el vértice del cono. El cuerpo formado por estos cilindros contiene el cono. Por eso, el volumen de este cuerpo no es menor que el volumen del cono. Si elevamos los cilindros a la distancia $\frac{R}{n}$, todos ellos menos el último quedarán dentro del cono. Por eso, el volumen del cuerpo formado de estos cilindros no es mayor que el volumen del cono. Si V' es el volumen del cono, obtenemos de esta forma la desigualdad

$$V'_1 + V'_2 + \ldots + V'_{n-1} \leqslant V' \leqslant V'_1 + V'_2 + \ldots + V'_n. \quad (2)$$

Hallemos la suma de los volúmenes $V'_m + V_{m+1}$. Según el teorema de Pitágoras, el radio de la base del $(m+1)$-ésimo cilindro en el caso de la semiesfera es igual a $\sqrt{R^2 - \left(\frac{m}{n} R\right)^2}$. Por eso, se tiene

$$V_{m+1} = \pi \left[R^2 - \left(\frac{m}{n} R\right)^2\right] \frac{R}{n}.$$

En el caso del cono, el radio del m-ésimo cilindro es igual a $\frac{m}{n} R$. Por eso, se tiene

$$V'_m = \pi \left(\frac{m}{n} R\right)^2 \frac{R}{n}.$$

Vemos, pues, que

$$V_{m+1}+V'_m=\frac{\pi R^3}{n}.$$

Observemos que $V_1=\frac{\pi R^3}{n}$ y $V'_n=\frac{\pi R^3}{n}$.

Sumando miembro por miembro las desigualdades (1) y (2), encontramos

$$\frac{n-1}{n}\pi R^3\leqslant V+V'\leqslant\frac{n-1}{n}\pi R^3+V_1+V'_n=\frac{n+1}{n}\pi R^3.$$

Puesto que estas desigualdades son válidas para cualquier valor de n y como $\frac{n-1}{n}\to 1$ y $\frac{n+1}{n}\to 1$ si $n\to\infty$, obtenemos $\pi R^3\leqslant V+V'\leqslant\pi R^3$. Por consiguiente, $V+V'=\pi R^3$.

Ya que el volumen del cono es $V'=\frac{1}{3}\pi R^3$, el volumen de la semiesfera es igual a $\frac{2}{3}\pi R^3$ y el volumen de la esfera es igual a $\frac{4}{3}\pi R^3$. Queda demostrado el teorema.

Se llama *segmento esférico* el cuerpo que un plano trunca de la esfera (fig. 226). *El volumen del segmento esférico se determina según la fórmula*

$$V=\pi H^2\left(R-\frac{H}{3}\right),$$

donde R es el radio de la esfera de la que se ha truncado el segmento y H es la altura del segmento (se llama *altura del segmento esférico* el segmento AB del diámetro perpendicular al plano secante). Esta fórmula se demuestra igual que la fórmula para el volumen de la semiesfera.

Se llama *sector esférico* el cuerpo que se obtiene a partir del segmento esférico y del cono de la forma siguiente. Si el segmento esférico es menor que la semiesfera, se le complementa con el cono cuyo vértice es el centro de la esfera y cuya base coincide con la base del segmento. Si el segmento es mayor que la semiesfera, el cono señalado se extrae del segmento (fig. 227). El volumen del sector esférico se obtiene sumando y restando los volúmenes correspondientes del segmento y del cono. *Para el volumen del sector esférico se obtiene la fórmula siguiente*

$$V=\frac{2\pi R^2 H}{3},$$

donde R es el radio de la esfera y H es la altura del segmento esférico correspondiente.

Demostremos ahora que la superficie esférica puede ser encerrada en un cuerpo simple de volumen tan pequeño como se quiera. Sea R el radio de la esfera. Construyamos dos esferas T_1 y T_2 del mismo centro que ésta y de radios $R - \varepsilon$ y $R + \varepsilon$, donde ε es un número positivo pequeño. Dividamos el espacio en cubos pequeños de diagonal menor que ε.



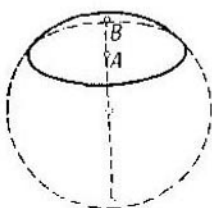


Fig. 226

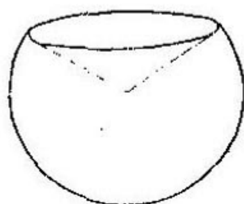


Fig. 227

Construyamos ahora dos cuerpos simples T'_1 y T'_2 de la forma siguiente. El cuerpo T'_1 consta de la esfera T_1 y de todos los cubos que tienen por lo menos un punto común con ella. El cuerpo T'_2 se obtiene de la esfera T_2 extrayendo todos los cubos que contienen puntos pertenecientes a la esfera y puntos que no le pertenecen.

El volumen del cuerpo T'_1 no es menor que el volumen de la esfera T_1, o sea, no es menor que $\frac{4}{3}\pi(R - \varepsilon)^3$. El volumen del cuerpo T'_2 no es mayor que el volumen de la esfera T_2, o sea, no es mayor que $\frac{4}{3}\pi(R + \varepsilon)^3$. El cuerpo simple que se obtiene extrayendo del cuerpo T'_2 el cuerpo T'_1 contiene nuestra superficie esférica y su volumen no es mayor que

$$\frac{4}{3}\pi\{(R+\varepsilon)^3-(R-\varepsilon)^3\}=\frac{8}{3}\pi(3R^2+\varepsilon^2)\varepsilon.$$

Si ε es suficientemente pequeño, el volumen de este cuerpo es tan pequeño como se quiera que es lo que se quería demostrar.

§ 29. AREAS DE SUPERFICIES DE REVOLUCIÓN

Concepto del área de la superficie convexa. Se llama *superficie convexa completa* la frontera del cuerpo convexo y se denomina *cuerpo convexo* todo cuerpo que con cada par de sus puntos incluye el segmento que los une. El poliedro convexo, el cilindro, el cono y la esfera son ejemplos de cuerpos convexos.

Para las figuras situadas en la superficie convexa completa se pueden introducir los conceptos de punto interior y de punto frontera igual que para las figuras planas (§ 24). A saber, el punto X de la figura G situada en la superficie convexa completa F se llama *interior* si todos los puntos de la superficie F suficientemente próximos a este punto pertenecen a la figura G. El punto Y se denomina punto *frontera* de la figura G si tan cerca a él como se quiera hay puntos de la figura G y puntos que no pertenecen a la figura G.

Por ejemplo, cortemos con un plano una superficie convexa completa y consideremos la figura formada por todos los puntos de la superficie que están a un mismo lado del plano; todos los puntos de esta figura menos los que están en el plano secante son interiores. Los puntos de la figura que se hallan en el plano secante son puntos frontera de la misma.

La figura situada en la superficie convexa completa se denomina *recinto* si todos sus puntos son interiores y si ella no se descompone en dos figuras con esta propiedad. Si agregamos al recinto su frontera, obtenemos el recinto cerrado que se denomina simplemente *superficie convexa*. Por ejemplo, las superficies laterales del cilindro y del cono y el segmento esférico representan superficies convexas.

Para que sea natural la definición del área de la superficie convexa que damos a continuación consideremos un problema práctico. Imaginemos la cúpula de un edificio y una chapa metálica en forma de un cuadrado de lado igual a 1 m. Supongamos que la cúpula y la chapa se pintan. Si para pintar la cúpula se ha empleado v_1 litros de pintura y para pintar la chapa se ha empleado v_2 litros de pintura, lo natural es considerar que el área de la cúpula del edificio es $\frac{v_1}{v_2}$ veces mayor que el área de la chapa. La magnitud $\frac{v_1}{v_2}$ caracteriza el área de la superficie de la cúpula en comparación con la unidad de área de 1 m². La cantidad de pintura

necesaria para cubrir la chapa es igual aproximadamente al volumen del paralelepípedo cuya base es el cuadrado 1 m × 1 m y cuya altura h es igual al grueso de la capa de pintura. Por eso, para estimar el área de la superficie de la cúpula obtenemos la magnitud $\frac{v_1}{h}$.

Pasemos ahora a la definición geométrica del área de la superficie. Sea F una superficie. Construyamos el cuerpo F_h formado por todos los puntos del espacio para los cuales existe a una distancia no mayor que h al menos un punto de la superficie F. Podemos imaginarnos claramente el cuerpo F_h como el cuerpo que se obtiene al cubrir ambos lados de la superficie F con una capa de pintura de grueso h.

Sea V_h el volumen del cuerpo F_h. Se llama *área de la superficie* F el límite de la razón $\frac{V_h}{2h}$ para $h \to 0$, o sea,

$$S = \lim_{h \to 0} \frac{V_h}{2h}.$$

Se puede demostrar que para las superficies convexas simples ya consideradas (superficies laterales del prisma y de la pirámide) esta definición conduce al mismo resultado que antes, a la suma de las áreas de las caras laterales.

Area de la superficie esférica. TEOREMA 29.1. *El área de la superficie esférica de radio R es igual a $4\pi R^2$.*

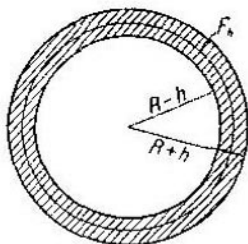


Fig. 228

DEMOSTRACION. Sea F una superficie esférica. El cuerpo F_h, del que trata la definición del área de la superficie, representa la capa comprendida entre dos esferas concénticas de radios $R + h$ y $R - h$ (fig. 228). El volumen de este cuerpo es igual a la diferencia entre los volúmenes de las esferas de radios $R + h$ y $R - h$, o sea, $V_h = \frac{4}{3}\pi[(R+h)^3 - (R-h)^3]$. Tenemos, pues,

$$\frac{V_h}{2h} = \frac{4\pi}{3 \cdot 2h}(6hR^2 + 2h^3) = 4\pi R^2\left(1 + \frac{h^2}{3R^2}\right);$$

si $h \to 0$, la razón $\frac{V_h}{2h}$ tiende al límite $4\pi R^2$ que es lo que se quería demostrar.

En el caso de la superficie esférica es fácil determinar el volumen V_h del cuerpo F_h. En otros casos esto puede ser un problema complejo. Pero como lo que nos interesa es el área de la superficie, o sea, el $\lim_{h\to 0} \frac{V_h}{2h}$, se puede tomar en lugar de F_h otro cuerpo cualquiera que dé el mismo límite para la razón $\frac{V_h}{2h}$. Ahora mostraremos cómo se puede deformar el cuerpo F_h sin que varíe el límite de $\frac{V_h}{2h}$ que nos interesa.

Supongamos que la frontera de la superficie considerada está formada por segmentos de rectas y por arcos de circunferencias. Fijemos un número cualquiera $a > 1$ y sea F'_{ah} el cuerpo constituido por los puntos del espacio que distan en ah todo lo más de la frontera de la superficie.

TEOREMA 29.2. *El límite de la razón* $\frac{V_h}{2h}$ *para* $h \to 0$ *no cambia si el cuerpo* F_h *se deforma como se quiera cerca de la frontera de la superficie considerada, o sea, en el interior del cuerpo* F'_{ah}.

DEMOSTRACION. Es obvio que la variación del volumen del cuerpo F_h no es mayor que el volumen V'_{ah} del cuerpo F'_{ah}. Por eso, basta demostrar que $\frac{V'_{ah}}{2h} \to 0$ si $h \to 0$.

Por hipótesis, la frontera de la superficie considerada consta de segmentos rectilíneos y de arcos de circunferencias. Construyamos los cuerpos F'_{ah} para cada pedazo de la frontera; encierran en conjunto el cuerpo F'_{ah} correspondiente a toda la frontera. Es decir, basta demostrar que $\frac{V'_{ah}}{2h} \to 0$ en los casos en que el cuerpo F'_{ah} se construya para un segmento rectilíneo o para un arco de circunferencia.

En el caso de un segmento rectilíneo de longitud l, el cuerpo F'_{ah} se puede encerrar dentro de un cilindro de radio ah y de longitud $l + 2ah$. El volumen de este cilindro es igual a $\pi a^2h^2 (l + 2ah)$. Si $h \to 0$, tenemos $\frac{\pi a^2h^2 (l+2ah)}{2h} \to 0$. Por consiguiente, $\frac{V'_{ah}}{2h} \to 0$.

En el caso de un arco de circunferencia de radio R, el cuerpo F'_{ah} se puede encerrar dentro del cuerpo que se obtiene extrayendo del cilindro de radio $R + ah$ y de altura $2ah$ el cilindro de radio $R - ah$ y de altura $2ah$.

El volumen de este cuerpo es igual a la diferencia entre los volúmenes de los cilindros: $\pi [(R + ah)^2 - (R - ah)^2] 2ah = 8\pi a^2h^2R$. Puesto que $\frac{8\pi a^2h^2R}{2h} \to 0$ si $h \to 0$, también en el caso de un arco de circunferencia obtenemos $\frac{V'_{ah}}{2h} \to 0$. Queda demostrado el teorema.

Area del segmento esférico. TEOREMA 29.3 *El área del segmento esférico de radio R y de altura H es igual a*

$$S = 2\pi RH.$$

DEMOSTRACION. Sea F el segmento que se trunca de la esfera de radio R. Construyamos el cuerpo F_h del que trata la definición del área de la superficie (fig. 229). Entonces, el área del segmento será igual al límite de la razón $\frac{V_h}{2h}$ para $h \to 0$. Según el teorema 29.2, este límite seguirá siendo el mismo si deformamos el cuerpo F_h cerca de la frontera del segmento. Realizaremos esta deformación a una distancia de la frontera no mayor que $\frac{h}{\cos\alpha}$, donde α es el ángulo que forma con el plano de la base del segmento el plano tangente construido en los puntos de la frontera del segmento. La deformación del cuerpo consistirá en que lo sustituiremos por el cuerpo comprendido entre dos esferas concéntricas de radios $R + h$ y $R - h$ y el plano de la base del segmento. Sea F'_h este cuerpo nuevo y sea V'_h su volumen.

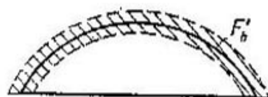


Fig. 229

El volumen del cuerpo F'_h es igual a la diferencia entre los volúmenes de dos segmentos, el segmento de radio $R + h$ y de altura $H + h$ y el segmento de radio $R - h$ y de altura $H - h$. Por consiguiente,

$$V'_h = \pi (H + h)^2 \left[(R + h) - \frac{H + h}{3} \right] - \pi (H - h)^2 \left[(R - h) - \frac{H - h}{3} \right] = 4\pi RHh + \frac{4}{3}\pi h^3.$$

Si $h \to 0$, se tiene $\frac{V'_h}{2h} \to 2\pi RH$. Queda demostrado el teorema.

Area lateral del cilindro. TEOREMA 29.4. *El área lateral del cilindro de radio R y de altura H es igual a $2\pi RH$.*

DEMOSTRACION. Sea F la superficie lateral del cilindro. Construyamos el cuerpo F_h del que trata la definición del área de la superficie. Entonces, el área lateral del cilindro será igual al límite de la razón $\frac{V_h}{2h}$ para $h \to 0$. Según el teorema 29.2, este límite no se altera si el cuerpo F_h se deforma cerca de la frontera de la superficie F, o sea, a una distancia no mayor que h de ésta.

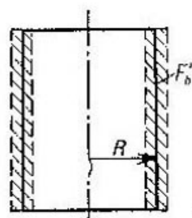


Fig. 230

Nuestra deformación del cuerpo F_h consistirá en que lo sustituiremos por el cuerpo que se obtiene extrayendo del cilindro de radio $R + h$ y de altura H el cilindro de radio $R - h$ y de la misma altura H (fig. 230). Sea F_h' este cuerpo y sea V_h' su volumen. El volumen del cuerpo F_h' es igual a la diferencia entre los volúmenes de estos cilindros: $V_h' = \pi (R + h)^2 H - \pi (R - h)^2 H = 4RHh$. Si $h \to 0$, tenemos $\frac{V_h'}{2h} \to 2\pi RH$ que es lo que se quería demostrar.

Area lateral del cono. TEOREMA 29.5. *El área lateral del cono truncado con bases de radio R_1 y R_2 y con generatrices de longitud l se determina según la fórmula*

$$S = \pi (R_1 + R_2)\, l.$$

DEMOSTRACION. Sea F la superficie cónica considerada. Construyamos el cuerpo F_h. Entonces, el área de la superficie cónica será igual al límite de la razón $\frac{V_h}{2h}$ para $h \to 0$. Según el teorema 29.2, este límite no se altera si el cuerpo F_h se deforma cerca de la frontera de la superficie F a una distancia de ésta no mayor que $\frac{h}{\operatorname{sen} \alpha}$, donde α es el ángulo entre las generatrices y los planos de las bases.

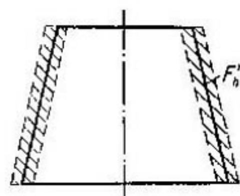


Fig. 231

Construyamos dos superficies cónicas F_1 y F_2 de modo que tengan el mismo eje que F y que sus generatrices en el plano principal sean paralelas a las generatrices de F y disten de éstas en h (fig. 231). Nuestra deformación del cuerpo F_h consistirá en que lo sustituiremos por el cuerpo F_h'

comprendido entre las superficies cónicas F_1 y F_2 y los planos de las bases de la superficie inicial F.

El volumen V'_h del cuerpo F'_h es la diferencia entre los volúmenes de dos conos de la misma altura que el cono inicial. Los radios de las bases de uno de los conos son $R_1 + \frac{h}{\operatorname{sen}\alpha}$ y $R_2 + \frac{h}{\operatorname{sen}\alpha}$ y del otro $R_1 - \frac{h}{\operatorname{sen}\alpha}$ y $R_2 - \frac{h}{\operatorname{sen}\alpha}$. Por consiguiente,

$$V'_h = \frac{1}{3}\pi H \left\{\left(R_1 + \frac{h}{\operatorname{sen}\alpha}\right)^2 + \left(R_1 + \frac{h}{\operatorname{sen}\alpha}\right)\left(R_2 + \frac{h}{\operatorname{sen}\alpha}\right) + \right.$$
$$\left. + \left(R_2 + \frac{h}{\operatorname{sen}\alpha}\right)^2\right\} - \frac{1}{3}\pi H \left\{\left(R_1 - \frac{h}{\operatorname{sen}\alpha}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \left(R_1 - \frac{h}{\operatorname{sen}\alpha}\right)\left(R_2 - \frac{h}{\operatorname{sen}\alpha}\right) + \left(R_2 - \frac{h}{\operatorname{sen}\alpha}\right)^2\right\} = \frac{2\pi H h}{\operatorname{sen}\alpha}(R_1 + R_2).$$

Si $h \to 0$, se tiene $\frac{V'_h}{2h} \to \pi(R_1 + R_2)\frac{H}{\operatorname{sen}\alpha}$ siendo $\frac{H}{\operatorname{sen}\alpha}$ la longitud de la generatriz de la superficie F. O sea, el área de la superficie lateral F del cono truncado es igual a $S = \pi(R_1 + R_2)\, l$.

El área lateral del cono no truncado se obtiene tomando en esta fórmula $R_2 = 0$.

§ 30. NOCIONES DE HISTORIA DE LA GEOMETRÍA

Los primeros resultados geométricos se remontan a la antigüedad y son de origen experimental. Fueron observados por el hombre en su actividad práctica. Como ciencia empírica, la Geometría alcanzó en su período inicial un nivel singularmente elevado en Egipto en relación con los trabajos de agrimensión y de riego.

Durante el primer milenio anterior a nuestra era las nociones de la Geometría pasaron de los egipcios a los griegos, y en la Grecia Antigua se inició una etapa nueva del desarrollo de esta ciencia. En el período comprendido entre los siglos VII y III antes de nuestra era, los geómetras griegos, además de enriquecer la Geometría con numerosos resultados nuevos, hicieron grandes progresos en su argumentación. Euclides (330-275 antes de nuestra era) resumió y sistematizó esta labor de los geómetras griegos en su famosa obra, «Elementos», que ha hecho llegar hasta nosotros la primera

exposición fundamentada de la Geometría. En ella, los razonamientos son tan irreprochables para su tiempo que los «Elementos» fue a lo largo de dos mil años desde su aparición el único tratado para los que estudiaban la Geometría.

Los «Elementos» de Euclides constan de trece libros de los cuales ocho dedicados a la Geometría propiamente dicha y los otros a la Aritmética. Cada libro de los «Elementos» empieza con la definición de las nociones. En el primer libro siguen a las definiciones postulados y axiomas. Por ejemplo:

POSTULADO I. Es posible trazar la recta de un punto a otro.

POSTULADO V. Si dos rectas cortadas por una tercera forman, del mismo lado de ésta, dos ángulos correspondientes internos cuya suma es menor que dos ángulos rectos, las dos rectas prolongadas suficientemente se cortan por este lado de la secante.

AXIOMA I. Dos cosas iguales a una tercera son iguales entre sí.

AXIOMA II. Si a dos cosas iguales se les añaden otras dos también iguales, se obtienen sumas iguales.

Tanto los postulados como los axiomas constituyen afirmaciones admitidas sin demostración. No se sabe en virtud de que principio unas afirmaciones pertenecen a los postulados y otras a los axiomas. En la exposición contemporánea llamamos axiomas a todas esas afirmaciones. A los axiomas siguen los teoremas y los problemas de construcción bajo el nombre genérico de «Proposiciones». Van lógicamente ordenados de manera que la demostración (solución) de cada proposición se basa en las precedentes.

Esta construcción de la Geometría sugirió a los geómetras el deseo natural de reducir al mínimo el número de postulados y axiomas, es decir, de afirmaciones admitidas sin demostración. Por eso, el propio Euclides y muchos geómetras después de él intentaron deducir algunos postulados y axiomas de los otros postulados y axiomas. En particular, muchos geómetras intentaron, comenzando por Euclides, demostrar el quinto postulado. Fueron propuestas muchas demostraciones del quinto postulado. Pero, en todas estas demostraciones, los autores utilizaron alguna afirmación equivalente al quinto postulado y no deducible de otros postulados y axiomas. Algunas de estas afirmaciones son:

1. Todas las perpendiculares a un lado del ángulo agudo cortan su otro lado.

2. Existen triángulos semejantes y no iguales.

3. Existen triángulos de área tan grande como se quiera.

4. Existen triángulos con la suma de ángulos igual a dos rectos.

5. Las rectas paralelas son equidistantes.

Las tentativas fallidas de demostrar el quinto postulado hizo dudar a ciertos geómetras, a partir de fines del siglo XVIII, de la posibilidad misma de demostrar el quinto postulado. La solución total de esta cuestión es obra del gran geómetra ruso Nikolái Ivánovich Lobachevski (1793-1856).

Uno de los equivalentes del quinto postulado es la afirmación de que por un punto exterior a una recta pasa no más de una recta paralela. Lobachevski sustituyó el quinto postulado por el siguiente: por un punto exterior a la recta perteneciente a un plano pasan dos rectas que no la cortan. Igual que sus predecesores, Lobachevski tenía la esperanza de descubrir una contradicción en el sistema de afirmaciones que se desprenden de este nuevo postulado. Sin embargo, después de desarrollar este sistema hasta el volumen de «Elementos», no descubrió en él contradicción alguna y sobre esta base llegó a la conclusión correcta de que existe una Geometría distinta de la euclidiana donde no tiene lugar el quinto postulado de Euclides. Esta se llama ahora Geometría de Lobachevski.

Los geómetras que siguieron a Lobachevski demostraron rotundamente que si no hay contradicciones en la Geometría de Euclides tampoco puede haberlas en la Geometría de Lobachevski. Así pues, en tanto a la falta lógica de contradicciones, ambas Geometrías se encuentran en situación de igualdad. Sólo la experiencia puede dirimir la cuestión de cuál de estas Geometrías describe mejor el mundo que nos circunda. Actualmente se ha establecido que la Geometría del mundo circundante a escala grande, cósmica, tiene una estructura más compleja que las Geometrías de Euclides y de Lobachevski. A escala relativamente pequeña, aquélla es próxima a la euclidiana. Por eso, en la vida cotidiana utilizamos la Geometría de Euclides.

Citaremos algunos teoremas de la Geometría de Lobachevski. Ante todo, en ella son válidos todos los teoremas de la Geometría euclidiana que hemos demostrado hasta el parágrafo de las paralelas. De esa suerte, en la Geometría de

Lobachevski son válidos los teoremas que formulan los criterios de la igualdad de los triángulos, los teoremas que establecen las relaciones entre los lados y los ángulos del triángulo, el teorema de la existencia y la unicidad de la perpendicular bajada desde un punto a la recta y muchos otros teoremas de la Geometría euclidiana.

Sin embargo, los teoremas para cuya demostración se utiliza el axioma de las paralelas de Lobachevski tienen un enunciado muy distinto. Por ejemplo, utilizando el axioma VI hemos demostrado que la suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos rectos. El teorema correspondiente de la Geometría de Lobachevski dice: la suma de los ángulos del triángulo es menor que dos rectos. Resulta que depende del triángulo. En particular, si un triángulo está dentro del otro, éste tiene la suma de ángulos menor.

En la Geometría de Euclides, como sabemos, existe para el triángulo un número infinito de triángulos semejantes no iguales a él. En la Geometría de Lobachevski, cuando los triángulos tienen iguales los ángulos correspondientes, son iguales; es decir, no existen triángulos semejantes no iguales.

En la Geometría de Euclides las rectas no secantes son equidistantes. En la Geometría de Lobachevski, las rectas no secantes divergen ilimitadamente, cuanto menos en una dirección.

En la Geometría de Euclides, se pueden trazar a dos rectas no secantes tantas perpendiculares como se quiera. En la Geometría de Lobachevski, la perpendicular común es sólo una o no existe.

Todos estos teoremas de la Geometría de Lobachevski pueden ser demostrados tomando el axioma de Lobachevski en lugar de nuestro axioma VI de las paralelas y conservando los demás. Empero, las demostraciones resultan bastante complejas. Esta es la explicación de que hicieran falta más de dos mil años para dirimir la imposibilidad de demostrar el quinto postulado.